

ОБЩЕСТВО «ЗНАНИЕ» РОССИИ
ПРИВОЛЖСКИЙ ДОМ ЗНАНИЙ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*VI Международная
научно-техническая конференция
молодых специалистов,
аспирантов и студентов*

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
И КОМПЬЮТЕРНОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ
И СОЦИАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ**

Сборник статей

май 2012 г.

Пенза

УДК 51
ББК 22.1
М34

М34 **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ
И СОЦИАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ** : сборник статей
VI Международной научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза :
Приволжский Дом знаний, 2012. – 208 с.

ISBN 978-5-8356-1245-1

Под редакцией ***И.В. Бойкова***, доктора физико-математических
наук, профессора

ISBN 978-5-8356-1245-1 © Пензенский государственный
университет, 2012 г.
© АННОО «Приволжский Дом знаний», 2012 г.

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НОВОГО КЛАССА ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

И.В. Бойков, М.А. Сёмов

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В работе предложены кубатурные формулы вычисления нового класса многомерных гиперсингулярных интегралов, даны оценки погрешности. Эффективность кубатурных формул иллюстрируется численными примерами.

Ж. Адамар [1] ввёл новый класс особых интегралов.

Определение 1 [1]. Интеграл вида $\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$ при целом p и $0 < \alpha < 1$ определяет величину («конечную часть») рассматриваемого интеграла как предел при $t \rightarrow b$ суммы $\int_a^x \frac{A(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}}$, если

предположить, что функция $B(x)$ имеет p производных в окрестности точки b . Здесь $B(x)$ – функция, на которую налагаются следующие условия: а) рассматриваемый предел существует; б) $B(x)$ имеет, по крайней мере, p производных в окрестности точки b .

В этой же работе Ж. Адамар ввёл определение многомерных гиперсингулярных интегралов и, используя аппарат гиперсингулярных интегралов, решил задачу Коши для линейных уравнений гиперболического вида.

Следующее обобщение гиперсингулярных интегралов было сделано Л.А. Чикиным при решении задачи Римана

$$\varphi^+(t) = G(t)\varphi^-(t) + f(t), t \in L$$

в особом случае, когда функция $G(t)$ обращается в нуль на контуре L . Это обобщение объединяет определение интеграла в смысле главного значения по Коши и определение интеграла Адамара.

Определение 2 [2]. Интегралом $\int_a^b \frac{\phi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p}, p = 2, 3, \dots, a < c < b,$

в смысле главного значения Коши – Адамара будем называть следующую

предел: $\int_a^b \frac{\phi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\phi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\phi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right],$ где

$\xi(v)$ – некоторая функция, удовлетворяющая следующим условиям: а)

$\xi(v)$ имеет непрерывные производные до $p - 1$ порядка в окрестности

нуля; б) $\xi(v)$ выбирается так, чтобы предел существовал.

Обобщение определения 2 на многомерные интегралы даны в монографии [3]. Там же приведены алгоритмы вычисления одномерных и многомерных гиперсингулярных интегралов.

В работе [4] при исследовании многослойных пластин был введён новый класс гиперсингулярных интегралов.

Пусть в плоскости R_2 задан непрерывный контур γ , определяемый функцией $\gamma(x_1, x_2) = 0$, причём функция $\gamma(x_1, x_2)$ может иметь нули до r -го порядка включительно.

Рассмотрим интеграл

$$H(\phi, \gamma) = \iint_{R_2} \frac{\phi(x_1, x_2)}{\gamma(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 \quad (1)$$

по плоскости R_2 .

Определение 3 [4]. Гиперсингулярный интеграл $H(\phi, \gamma)$ определяется как предел следующего выражения

$$H(\phi, \gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{R_2 \setminus \Gamma_\varepsilon} \frac{\phi(x_1, x_2)}{\gamma(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 - \frac{F_{\gamma, \varepsilon}(\varepsilon)}{\varepsilon^{r-1}} \right],$$
 где ε – положительное

число, Γ_ε – ε -окрестность контура γ , а $F_{\gamma, \varepsilon}$ – функция, удовлетворяющая следующим условиям: а) в области Γ_ε функция $F_{\gamma, \varepsilon}(t)$ имеет

непрерывные производные до $r-1$ порядка; б) предел существует.

Отметим, что аналогичным образом может быть определён гиперсингулярный интеграл по пространству R_n , $n = 3, 4, \dots$

В работе [5] были построены кубатурные формулы вычисления интегралов вида (1) и оценена их погрешность. Ниже нами построены более удобные в практическом отношении кубатурные формулы.

Кубатурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов

Рассмотрим гиперсингулярный интеграл

$$H\varphi(\varphi, \gamma) = \iint_{E_2} \frac{\varphi(t_1, t_2)}{(\gamma(t_1, t_2))^{p+\lambda}} dt_1 dt_2, \quad (2)$$

где $p = 3, 4, \dots$, $0 \leq \lambda \leq 1$. На функции $\phi(t_1, t_2)$ и $\gamma(t_1, t_2)$ наложим следующие условия: а) функции $\phi(t_1, t_2)$, $\gamma(t_1, t_2)$ имеют частные производные до r -го ($r \geq p$) порядка, ограниченные в совокупности константой M ; б) $\gamma(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in E_2$, обращается в нуль только на контуре γ ; в) справедливо неравенство $|\gamma(t_1, t_2)| \geq \alpha \rho(t, \gamma)$, где $\alpha > 0$, $\rho(t, \gamma)$ – расстояние от точки t ($t = (t_1, t_2)$) до контура γ в евклидовой метрике.

Пусть L – длина контура γ и пусть N – натуральное число. Обозначим через G область, ограниченную контуром γ . Для удобства описания кубатурной формулы предположим, что область G выпуклая или звёздная. Не ограничивая общности можно считать, что начало координат находится внутри области G и что любой луч, исходящий из начала координат, пересекает контур γ только в одной точке.

Обозначим через D квадрат $D = [-A, A; -A, A]$, такой, что $G \subset D$. Величина A выбрана таким образом, чтобы расстояние $\rho[\partial G, \partial D]$ было больше 1.

Предоставим интеграл $H\varphi$ в виде суммы

$$H(\varphi, \gamma) = \iint_{E_2 \setminus D} \frac{\varphi(t_1, t_2)}{\gamma(t_1, t_2)^{p+\lambda}} dt_1 dt_2 + \iint_D \frac{\varphi(t_1, t_2)}{\gamma(t_1, t_2)^{p+\lambda}} dt_1 dt_2 = H_1\varphi + H_2\varphi \quad (3)$$

и построим кубатурную формулу для его вычисления с точностью ε ($\varepsilon > 0$).

Интеграл $H_1\varphi$ является регулярным интегралом и для его вычисления можно дословно повторить рассуждения, проведённые в [5] и воспользоваться приведёнными там оценками.

Напомним, в основных чертах, алгоритм вычисления интеграла $H_1\varphi$. Покроем область $E_2 \setminus D$ областями D_k , состоящими из точек $t=(t_1, t_2)$, удовлетворяющих неравенствам $k^v A \leq \rho_1(t, 0) \leq (k+1)^v A$, $k=1, 2, \dots$, $v=(r+2)/(r+2-p-\lambda)$. Здесь $\rho_1(t, 0)$ – расстояние между точкой t и началом координат, определённое в метрике $\rho_1(t, 0) = \max(|t_1|, |t_2|)$. Пусть $h_k = ((k+1)^v - k^v)A$, $k=1, 2, \dots$. Каждую область D_k покроем кубами и параллелепипедами со сторонами Δ_i^k , параллельными осям и длинами сторон, не меньшими h_k и не большими $2h_k$, $k=1, 2, \dots$.

Построим кубатурную формулу для вычисления интеграла $H_1\varphi$ с точностью $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Прежде всего опишем кубатурные формулы для

$$\text{вычисления интегралов } \iint_{\Delta_i^k} \frac{\varphi(t_1, t_2)}{(\gamma(t_1, t_2))^{p+\lambda}} dt_1 dt_2.$$

Обозначим через l_1, \dots, l_r узлы полинома Лежандра степени r , расположенные на сегменте $[-1, 1]$, а через l'_1, \dots, l'_r их образы при аффинном отображении сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[a, b]$.

Пусть $f(t) \in C[a, b]$. Обозначим через $P_r^t[f, [a, b]]$ полином, интерполирующий функцию $f(t)$ на сегменте $[a, b]$ по узлам l'_1, \dots, l'_r . Пусть $f(t_1, t_2) \in C[a, b; c, d]$. Через $P_{rr}[f, [a, b; c, d]]$ обозначим полином, интерполирующий функцию $f(t_1, t_2)$ по формуле $P_{rr}[f, [a, b; c, d]] = P_r^{t_1}(P_r^{t_2}(f, [c, d]), [a, b])$, т.е. вначале функция $f(t_1, t_2)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_r^{t_2}[f, [c, d]]$ по переменной t_2 , а затем полином $P_r^{t_2}[f, [c, d]]$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_r^{t_1}(P_r^{t_2}(f, [c, d]), [a, b])$.

Интеграл $H_1\varphi$ будем вычислять по кубатурной формуле

$$H_1\varphi = \sum_{k=1}^{m_*} \sum_{l=1}^{m_k} \iint_{\Delta_l^k} P_{rr} \left(\frac{\varphi(t_1, t_2)}{(\gamma(t_1, t_2))^{p+\lambda}}, \Delta_l^k \right) dt_1 dt_2 + R_{1,r}(\varphi), \quad (4)$$

где m_k – число областей Δ_l^k в покрытии области D_k , m_* – число областей Δ_l^k , участвующих в построении кубатурной формулы (4). Число m_* определяется из требования, чтобы $|\mathbf{R}_1(\phi)| \leq \varepsilon_1$.

В работе [5] показано, что для достижения точности ε_1 нужно положить $m_* = \left\lceil \left(\frac{2\text{CM}}{\varepsilon} \right)^{(r+2-p-\lambda)/((r+2)(p-2-\lambda))} A \right\rceil + 1$.

В работе [5] показано, что для достижения точности ε_1 нужно положить $n = \left\lceil \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{r(p+\lambda)/((r^2-4)(p+\lambda-2))} \right\rceil + 1$.

Таким образом, построена кубатурная формула, вычисляющая интеграл $H_1\varphi$ с точностью ε_1 .

Приступим к построению кубатурной формулы вычисления интеграла $H_2\phi$.

Зафиксируем натуральное число N . Обозначим через L длину контура γ и разделим контур γ на N частей γ_k , $k = 1, 2, \dots, N$, точками v_k , $k = 0, 1, \dots, N$. Точки v_k выбираются таким образом, чтобы длины дуг γ_k были бы равны.

Замечание. При вычислении конкретных интегралов достаточно потребовать равенство длин хорд, соединяющих концы дуг γ_k . Это следует при достаточно больших значениях N из гладкости контура γ .

Проведём из начала координат через точки w_k , $k = 0, 1, \dots, N$, лучи до пересечения с границей ∂D квадрата D . Точки пересечения обозначим через v_k , $k = 0, 1, \dots, N$. Будем считать, что в результате этого построения квадрат D оказался покрытым N треугольниками Δ_k , $k = 1, 2, \dots, N$. Может оказаться, что среди треугольников Δ_k , $k = 1, 2, \dots, N$, имеется не более 4 четырёхугольников. Проведя дополнительные лучи, соединяющие начало координат с вершинами квадрата D , покрываем область D треугольниками. В каждом треуголь-

нике Δ_k , проведём хорды, соединяющие точки v_k и v_{k+1} , и тем самым покроем треугольник Δ_k треугольником Δ_k^1 и трапецией Tr_k , $k = 1, 2, \dots, N$.

В каждом треугольнике Δ_k аппроксимируем интеграл $\iint_{\Delta_k} \frac{\varphi(t_1, t_2)}{(\gamma(t_1, t_2))^{p+\lambda}} dt_1 dt_2$ следующим $\iint_{\Delta_k} \frac{\varphi^*(t_1, t_2)}{(t_2 - a_k t_1 + b_k)^{p+\lambda}} dt_1 dt_2$, где $t_2 = a_k t_1 + b_k$ – уравнение хорды, соединяющей точки v_k и v_{k+1} , $k = 0, 1, \dots, N$.

Здесь $\varphi^*(t_1, t_2)$ – функция, определяемая следующим образом. Обозначим через $B(t_2 = a_k t_1 + b_k, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) окрестность прямой $t_2 = a_k t_1 + b_k$. В области $B(t_2 = a_k t_1 + b_k, \varepsilon)$ положим $\varphi^*(t_1, t_2) = \varphi(t_1, t_2)$, а в области $\Delta_k \setminus (B(t_2 = a_k t_1 + b_k, \varepsilon) \cap \Delta_k)$ положим $\varphi^*(t_1, t_2) = \frac{\varphi(t_1, t_2)(t_2 - a_k t_1 + b_k)^{p+\lambda}}{(\gamma(t_1, t_2))^{p+\lambda}}$.

Обозначим через w_k точку пересечения луча $0v_k$ с прямой $t_2 = a_k t_1 + b_k$. На сегменте $[0, w_k]$ построим множество точек $c_{k,j}$, $j = 0, 1, \dots, M_k$. Построение проведём следующим образом. Отложим от точки w_k по направлению к началу координат точки $c_{k,j}$, расстояние которых от точки w_k равно $h_{k,j} = |0w_k| \left(\frac{j}{M_k} \right)^{v_1}$, $j = 0, 1, \dots, M_k$. Проведём через точки $c_{k,j}$, $j = 1, 2, \dots, M_k - 1$, $k = 0, 1, \dots, N$, прямые, параллельные прямой $t_2 = a_k t_1 + b_k$ до пересечения с отрезком $0v_{k+1}$. Обозначим точки пересечения через $d_{k,j}$, $j = 1, 2, \dots, M_k - 1$, $k = 0, 1, \dots, N$. В результате этих построений треугольник $\Delta 0w_k w_{k+1}$ оказался покрытым областями g_j^k , $j = 0, 1, \dots, M_k - 1$, $k = 0, 1, \dots, N$. Среди этих областей – один треугольник $(\Delta 0c_{k, M_k - 1} d_{k, M_k - 1})$, остальные – трапеции.

Рассмотрим теперь в треугольнике $\Delta O v_k v_{k+1}$ трапецию $w_k v_k v_{k+1} w_{k+1}$. На сегменте $[w_k, v_k]$ построим множество точек $e_{kj}, j = 0, 1, \dots, M_k^*, k = 0, 1, \dots, N$. Построение проведём следующим образом. Отложим от точки w_k по направлению точки v_k точки $e_{kj}, j = 0, 1, \dots, M_k^*$, расстояние которых от точки w_k равно $h_{kj}^* = |w_k v_k| \left(\frac{j}{M_k^*} \right)^{v_1}, j = 0, 1, \dots, M_k^*$.

Отметим, что значения M_k и M_k^* подбираются таким образом, чтобы $|O w_k| / (M_k)^{v_1} = |w_k v_k| / (M_k^*)^{v_1}$. Проведём через точки $e_{k,j}, j = 1, 2, \dots, M_k^* - 1, k = 0, 1, \dots, N$, прямые, параллельные прямой $t_2 = a_k t_1 + b_k$ до пересечения с отрезком $O v_{k+1}$. Обозначим точки пересечения через $f_{k,j}$. В результате этих построений трапеция $w_k v_k v_{k+1} w_{k+1}$ оказывается покрытой трапециями $g_j^{*k}, j = 0, 1, \dots, M_k^* - 1, k = 0, 1, \dots, N$.

Каждую из областей $g_j^k, j = 1, 2, \dots, M_k - 1 (g_j^{*k}, j = 1, 2, \dots, M_k^* - 1), k = 0, 1, \dots, N$ впишем в наименьший прямоугольник $s_j^k, j = 1, 2, \dots, M_k - 1 (s_j^{*k}, j = 1, 2, \dots, M_k^* - 1) k = 0, 1, \dots, N$, с двумя сторонами, параллельными прямой $t_2 = a_k t_1 + b_k$.

Объединению областей $g_0^k \cup g_0^{*k}$ поставим в соответствие прямоугольник s_0^{-k} , построенный следующим образом. Основаниями этого прямоугольника являются прямые $c_{k,1} c_{k+1,1}$ и $e_{k,1} e_{k+1,1}$, а боковые грани проходят через точки w_k и w_{k+1} .

Кубатурная формула для вычисления интеграла $H_2 \varphi$ имеет вид

$$H_2 \varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M_k-1} \iint_{s_j^k} \frac{P_{rr}(\varphi^*, s_j^k) dt_1 dt_2}{(t_2 - a_k t_1 + b_k)^{p+\lambda}} + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M_k^*-1} \iint_{s_j^{*k}} \frac{P_{rr}(\varphi^*, s_j^{*k}) dt_1 dt_2}{(t_2 - a_k t_1 + b_k)^{p+\lambda}} + \iint_{s_0^{-k}} \frac{P_{rr}(\varphi^*, s_0^{-k}) dt_1 dt_2}{(t_2 - a_k t_1 + b_k)^{p+\lambda}} + R_N(\varphi). \quad (5)$$

Объединяя формулы (4) и (5), получаем кубатурную формулу вычисления интеграла $H \varphi$.

Прежде чем переходить к оценке погрешности предложенной кубатурной формулы, остановимся на нескольких замечаниях, упрощающих реализацию кубатурной формулы.

1. При вычислении интегралов, входящих в формулу (5) можно перейти к новой системе координат. В частности, при вычислении интеграла

$$\iint_{s_j^k} \frac{P_{rr}(\varphi_1^* s_j^k) dt_1 dt_2}{(t_2 - a_k t_1 - b_k)^{p+\lambda}}$$

при фиксированном значении k переходим к локальной системе координат O_{y_1, y_2} , сделав замену переменных:

$$y_1 = a_k t_1 + b_k, \quad y_2 = t_2.$$

$$\iint_{s_j^k} \frac{\varphi^*(t_1, t_2) dt_1 dt_2}{(t_2 - a_k t_1 - b_k)^{p+\lambda}} \quad (6)$$

преобразуется к виду $\iint_{s_j^k} \frac{\varphi^{**}(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{(y_2 - y_1)^{p+\lambda}}$, где $\varphi^{**}(y_1, y_2)$ – функция,

полученная из $\varphi^*(t_1, t_2)$ при переходе к новой системе координат.

2. В областях s_j^k , достаточно удалённых от прямой $t_2 = a_k t_1 + b_k$, интеграл (6) можно вычислять по кубатурной формуле

$$\iint_{s_j^k} P_{rr} \left(\frac{\varphi^*(t_1, t_2)}{(t_2 - a_k t_1 - b_k)^{p+\lambda}}, s_j^k \right) dt_1 dt_2.$$

Оценка погрешности построенной кубатурной формулы оценивается по той же схеме, что и в работе [5], но технически более сложно. Можно показать, что для этой кубатурной формулы сохраняется оценка, приведенная в [5].

Библиографический список

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – 351 с.
2. Чикин Л.А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Уч. записки Казан. гос. ун-та. – 1953. – Т. 113. – Кн. 10. – С. 57 – 105.
3. Бойков И.В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Ч. 2. Гиперсингулярные интегралы. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. – 252 с.

4. Boykov I.V., Boykova A.I., Ventsel E.S. Fundamental Solutions for Thick Sandwich Plate // Engineering Analysis and Boundary Elements. – 2004. – V. 28. – P. 1437 – 1444.

5. Boykov I.V., Boykova A.I., Ventsel E.S. An approximation methods for evaluating hypersingular integrals// Engineering analysis with Boundary elements. 2006. – V. 30. – P. 799 – 807.

APPROXIMATE SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS WITH HOMOTOPY METHOD

I.V. Boykov, S. Faydaoglu, M. Astanin

Penza State University, Penza, Russia (boikov@pnzgu.ru)
Dokuz Eylul University, Izmir,
Turkey (serife.faydaoglu@deu.edu.tr),
Penza State University, Penza, Russia (foxpnz@mail.ru)

Abstract: This paper is devoted to application of homotopy method for approximate solution of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the first and second kinds. The proposed algorithm avoids the complexity provided by other numerical approaches. The analysis is accompanied by numerical example. The results reveal that the approximation is of high accuracy.

Key words: Fredholm integral equations, homotopy method

1. Introduction

Numerical methods for solution of nonlinear Fredholm integral equations play a great role in many fields of physics and technology. Constructed the numerical methods for solution of nonlinear equations (not only integral equations) collide with initial value problem. This is a very hard problem and this problem has not a final decision yet. One of the method for solution of nonlinear equations is the homotopy method. The method of continuation of solutions of nonlinear equations go back to U. Le Verrier, A. Poincare [1], S.N. Bernstein [2, 3]. This method was applied in many theoretical and applied works [4, 5, 6].

For example, U. Le Verrier and A. Poincare method of small parameter is based on parameter continuation of solution [7]. In numerical mathematics the first who applied method of continuation of solution of equations was M.E. Lahage [8].

The method of continuation on parameter was used by Fock in problem of diffraction of radio waves [9]. Now this method is applied in mechanics and physics (in theory of magnetic nuclear resonance) widely. This method was studied in several aspects by D.F. Davidenko [10–12].

The nonlinear differential equations of conservative oscillators can not be approximated by a linear differential equation in which the approximate frequency depends on the oscillation amplitude. A new adjustment of homotopy perturbation method was introduced by setting up a linear term with an unknown frequency to be determined further and the solutions are in form of series expansions and may be convergence asymptotically [16].

2. Numerical homotopy method for nonlinear integral equations

Let us consider the nonlinear integral equation

$$K(x) \equiv x(t) + \int_0^1 h(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f(t) \quad (1)$$

where $x(t)$ is unknown function, $f(t)$ is known function. It is assumed that function $h(t, \tau, u)$ has the continuous derivative of the first order on variable u ;

satisfies Dini-Lipshitz condition with respect to the first variable and is continuous with respect to second variable.

Let z_0 is a initial approximation to the solution x^* of the equation (1).

Let us introduce the parameter λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) and represent the equation (1) in the form

$$K_\lambda(x) \equiv x(t) + (1-\lambda) \int_0^1 [h(t, \tau, z_0(\tau)) - h'_u(t, \tau, z_0(\tau))z_0(\tau)] d\tau + \\ + (1-\lambda) \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau))x(\tau) d\tau + \lambda \int_0^1 h(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f(t),$$

or in the more comfortable form

$$K_\lambda(x) \equiv x(t) + \lambda \int_0^1 h(t, \tau, x(\tau)) d\tau + (1-\lambda) \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau))x(\tau) d\tau = f_\lambda(t), \quad (2)$$

where

$$f_\lambda(t) \equiv f(t) + (1-\lambda) \int_0^1 h(t, \tau, z_0(\tau)) d\tau + (1-\lambda) \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau))z_0(\tau) d\tau.$$

Let $\lambda_k = k/n$, $k = 0, 1, \dots, N$. The zero approximation x_0 is the solution of the equation

$$K_{\lambda_0}(x) \equiv x(t) + \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau))x(\tau) d\tau = f_0(t). \quad (3)$$

The equation (3) is obtained from the equation (2) by taking $\lambda_0 = 0$.

The first approximation x_1 we find from nonlinear integral equation

$$K_{\lambda_1}(x) \equiv x(t) + (1 - \lambda_1) \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau))x(\tau) d\tau + \lambda_1 \int_0^1 h(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f_1(t). \quad (4)$$

The equation (4) is solved with modified Newton-Kantorovich method with initial approximation x_0 .

The operator $K_{\lambda_1}(x)$ is the nonlinear operator from $C[0,1]$ in $C[0,1]$.

The Frechet derivative $K'_{\lambda_1}(x)x$ of the operator $K(x)$ on the element x_0 is

$$K'_{\lambda_1}(x_0)x \equiv x(t) + (1 - \lambda_1) \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau))x(\tau) d\tau + \lambda_1 \int_0^1 h'_u(t, \tau, x_0(\tau))x(\tau) d\tau.$$

Modified Newton-Kantorovich method for solution of the equation (4) is

$$x_{m+1} = x_m - [K'_{\lambda_1}(x_0)]^{-1}(K_{\lambda_1}(x_m) - f_1), \quad m = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Justifying the convergence of the iterations (5) we must to consider the two cases:

(i) The derivative $K'_{\lambda_1}(x)$ satisfies the Lipshitz condition,

(ii) The derivative $K'_{\lambda_1}(x)$ does not satisfy the Lipshitz condition.

In the first case we will use the following statement.

Let us consider nonlinear operator equation $F(x)=0$, where $F(x)$ is nonlinear operator from Banach space X in Banach space Y .

Theorem 1 [13]. Assume that the following conditions hold:

(i) In the sphere $S(u_0, R)$ with the center in the point $u_0 \in X$ and with radius R bounded operator $\Gamma_0 = [F'(u_0)]^{-1}$ exist and $\|\Gamma_0\| \leq b_0$, $\|\Gamma_0 F(u_0)\| \leq \eta_0$;

(ii) In the sphere $S(u_0, R)$, $\|F'(x) - F'(y)\| \leq L\|x - y\|$, $x, y \in S(u_0, R)$;

(iii) Let $h_0 = b_0 L \eta_0 < 1/2$, $r_0 = (1 - \sqrt{1 - 2h_0})\eta_0 / h_0 \leq R$.

Then iterations $x_{n+1} = x_n - \Gamma_0 F(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$

convergence to the solution $\hat{x} \in S(u_0, r_0)$ of the equation $F(x) = 0$.

In the second case the following theorem is used.

Theorem 2 [14]. Let X and Y are Banach spaces and let the following conditions hold:

(i) $\|F(x)\| = \eta_0$;

(ii) The operator $F(x)$ has the Gateaux derivative $F'(x_0)$ in the point x_0 ;

(iii) A right inverse operator $[F'(x_0)]_r^{-1}$ exists and $\|[F'(x_0)]_r^{-1}\| < B_0$;

(iv) In the sphere $S = \{x : \|x - x_0\| \leq B_0 \eta_0 / (1 - q)\}$, $0 < q < 1$, the inequality $\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq q / B_0$ occur.

Then iterations $x_{n+1} = x_n - [F(x_0)]_r^{-1} F(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$ convergence to solution $\hat{x} \in S(x_0, r_1)$, $r_1 = B_0 \eta_0 / (1 - q)$, of the equation $F(x) = 0$.

Let us return to the equation (4). The function $h'_u(t, \tau, u)$ is continuous with respect to the variable u . Thus using the Theorem 2.

$$\text{Let } B_0 \|K'_{\lambda_1}(y_1) - K'_{\lambda_1}(y_2)\| \leq q < 1,$$

$$\text{where } B_0 = \|[K'_{\lambda_1}(x_0)]^{-1}\|; \quad y_1, y_2 \in S(x_0, \rho),$$

$$\rho = B_0 \eta / (1 - q), \quad \eta = \|K_{\lambda_1}(x_0) - f_1\|.$$

Under these conditions the iterative method (5) convergence to the solution x_1 of the equation (4).

Then we considered the equation

$$K_{\lambda_2}(x) \equiv x(t) + (1 - \lambda_2) \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau)) x(\tau) d\tau + \lambda_2 \int_0^1 h(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f_2(t) \quad (6)$$

and repeat for this equation the algorithm given above.

If it is assumed that the necessary conditions for convergence modified Newton-Kantorovich method for the equation (6) are fulfilled and this method convergences to solution x_2 of the equation (6).

Repeating this procedure for equation

$$K_{\lambda_j}(x) \equiv x(t) + (1 - \lambda_j) \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau)) x(\tau) d\tau + \lambda_j \int_0^1 h(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f_j(t),$$

$j=3, 4, \dots, m$, with initial condition x_{j-1} . Here m is the biggest number for which the algorithms converge.

Two cases are considered: (i) $m=N$, (ii) $m < N$.

In the first case $\lambda = 1$ the approximate solution of the equation (1) is obtained.

In the second case $\lambda_m < 1$ we have the set x_0, x_1, \dots, x_m of successive approximations. As it was noticed in [13] there are not any rules for definition of the moment m of stopping of algorithm of calculation of successive approximations x_0, x_1, \dots . In the third section we propose the numerical algorithm for restoration of the solution $x(t)$ of the equation (1) on the segment $[0, 1]$.

Let us stop on numerical algorithm for solution of the equation (1).

Approximate solution of the equation (1) is considered in the form of the polynomial $\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^L \alpha_k \psi_k(t)$, where $\psi_k(t)$ are the fundamental polynomials on the knots t_k , $k = 1, 2, \dots, L$. The knots t_k , $k = 1, 2, \dots, L$, are images of knots ζ_k , $k = 1, 2, \dots, L$, of Chebyshev polynomial of the first kind of L order which are received in result of affine transformation of the segment $[-1, 1]$ on $[0, 1]$.

The coefficients α_k , $k = 1, 2, \dots, L$, are found from the system of nonlinear algebraic equations

$$\hat{x}(t) + P_L^r \left[\int_0^1 P_L^r [h(t, \tau, \hat{x}(\tau))] d\tau \right] = P_L^r [f(t)], \quad (7)$$

where P_L^r is the projector from space $C[0, 1]$ to the set of interpolation polynomials of $L-1$ order constructed with respect to knots t_k , $k = 1, 2, \dots, L$. The verification of the numerical method (7) is well known [13].

Repeating for the equation (7) all steps of the algorithm which we described above for the equation (1) we complete the first numerical method for solution of the equation (1).

3, Continuous solutions of integral equations on parameter

The equation (1) can be rewritten in the form

$$K_\lambda(x) \equiv x(t) + \lambda \int_0^1 h(t, \tau, x(\tau)) d\tau + (1 - \lambda) \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau)) x(\tau) d\tau = f_\lambda(t). \quad (8)$$

Let us assume that the equation (8) has the solution $x(t, \lambda)$, $0 \leq t < 1$, determined for all λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, and differentiate with respect to parameter λ . In result we have

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial \lambda} + \int_0^1 h(t, \tau, x(\tau, \lambda)) d\tau + \lambda \int_0^1 h'_u(t, \tau, x(\tau, \lambda)) \frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial \lambda} d\tau - \\ & - \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau)) x(t, \lambda) d\tau + (1 - \lambda) \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau)) \frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial \lambda} d\tau = \quad (9) \\ & = \int_0^1 h(t, \tau, z_0(\tau)) d\tau - \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau)) z_0(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Let us take the initial condition

$$x(t, 0) = x_0(t), \quad (10)$$

where $x_0(t)$ is the solution of the linear equation

$$x(t) + \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau))x(\tau)d\tau = f_0(t).$$

The Cauchy task (9)-(10) is solved with Euler method with step $h=1/N$. On the each step of Euler method we have the integral equation

$$\begin{aligned} & x(t, \lambda_{m+1}) + \lambda_m \int_0^1 h'_u(t, \tau, x(\tau, \lambda_m))x(\tau, \lambda_{m+1})d\tau + \\ & + (1 - \lambda_m) \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau))x_{m+1}(\tau)d\tau = \\ & = \lambda_m \int_0^1 h'_u(t, \tau, x(\tau, \lambda_m))x(\tau, \lambda_m)d\tau + \\ & + (1 - \lambda_m) \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau))x(\tau, \lambda_m)d\tau + x(\tau, \lambda_m) + \\ & + h \left(\int_0^1 h(t, \tau, z_0(\tau))d\tau - \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau))z_0(\tau)d\tau - \right. \\ & \left. - \int_0^1 h(t, \tau, z_0(\tau))x(\tau, \lambda_m)d\tau + \int_0^1 h'_u(t, \tau, z_0(\tau))x(\tau, \lambda_m)d\tau \right). \end{aligned} \quad (11)$$

This equation can be written in the standard form as

$$x_{m+1}(t) - \int_0^1 K_m(t, \tau)x_{m+1}(\tau)d\tau = f_m(t), \quad (12)$$

where $x_{m+1}(t) = x(t, \lambda_{m+1})$. Other designations are obvious.

According conditions on functions $h(t, \tau, u)$ and $h'_u(t, \tau, u)$ one can see that the kernel $K_m(t, \tau)$ is continuous with respect to variables t and τ . So, the Fredholm alternative has place for the equation (12). If the eigenvalues of operators $\int_0^1 K_m(t, \tau)x(\tau)d\tau$ are not equal to 1 for all m , $m=1, 2, \dots, N$, then one can realize numerical method (11). The approximate solution of the equation (1) one has when $m=N$.

It is unknown conditions which are sufficient for convergence of algorithm (11) for all values m , $m=1, 2, \dots, N$.

If the calculations are interrupted in the moment m_* , $0 < m_* < N$, then it is necessary algorithm for continuous the function $x(t, \lambda)$ on values

λ_k , $k = m_*, m_* + 1, \dots, N$. Corresponding algorithm will be described in the section 3.

Let us consider numerical realizations of the offered method. There are two algorithms for realization.

At first, we can take the equation (8) as a base equation.

Approximate solution of the equation (8) is given in the form of polynomial

$$\widehat{x}(t) = \sum_{k=1}^L \alpha_k \psi_k(t),$$

where $\psi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, L$, are the fundamental polynomials constructed with respect to knots t_1, \dots, t_L . The knots t_1, \dots, t_L are images of knots ζ_k , $k=1, \dots, L$, of Chebyshev polynomial of the first kind of L order which are received in result of affine transformation of the segment $[-1, 1]$ on $[0, 1]$.

Coefficients α_k are determined from the system of nonlinear algebraic equations of the method of mechanical quadrature

$$\begin{aligned} P_L^t[\widehat{x}(t) + \lambda \int_0^1 P_L^r[h(t, \tau, \widehat{x}(\tau))d\tau] + \\ + (1 - \lambda) \int_0^1 P_L^r[h'_u(t, \tau, z_0(\tau))\widehat{x}(\tau)d\tau] = P_L^t[f_\lambda(t)], \end{aligned} \quad (13)$$

where P_L^t is the projector from space $C[0, 1]$ on the set of interpolation polynomials of $L-1$ order with respect to variable t constructed on set of knots t_1, \dots, t_L .

Justification of the method of mechanical quadrature for nonlinear Fredholm integral equations of the second kind is well known [13].

Using the equation (13) the algorithm describing above equation we receive the numerical method for solution of the equation (1).

Secondly, we can take the equation (12) as a base equation. Approximate solution of the equation (12) is given in the form of the polynomial $\widehat{x}(t)$, which coefficients are determined from the system of nonlinear algebraic equation of the method of mechanical quadratures

$$P_L^t[\widehat{x}(t) - \int_0^1 P_L^r[K_m(t, \tau)\widehat{x}(\tau)d\tau] = P_L^t[f_m(t)]. \quad (14)$$

The justification of the method of mechanical quadrature for nonlinear Fredholm integral equations of the second kind is well known [13].

4. Algorithms for continuation of solution

As it is mentioned above there are not sufficient conditions for determination m number of steps of numerical algorithms. If the numerical algorithm will

stop on the step m_* with $m_* < N$, then there are necessary algorithms for continuation of solution $x(t, \lambda)$ to the values $\lambda=1$.

This task can be formulated by following the below given procedure.

Let assume that the values $x(t, \lambda_k)$ on the knots $\lambda_k = k/N$, $k = 0, 1, \dots, m_*$ are known. Thus, It is necessary to calculate the values $x(t, \lambda_k)$ on the knots λ_k , $k = m_* + 1, \dots, N$.

For solution of this task we use the Bernstein polynomials [15]. Let $f(t) \in C[0, 1]$. The polynomial

$$B_n(f, t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$$

is the Bernstein polynomial for the function $f(t)$.

Kantorovich Theorem [15]. Let $f(t)$ is a whole function. Then $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f, t) = f(t)$ for all $t \in (-\infty, \infty)$.

So, if the solution $x(t, \lambda)$ of the equation (2) is a whole function with respect to variable λ , we can construct the set of Bernstein polynomials which convergence to the function $x(t, \lambda)$ on the segment $[0, 1]$. Really, let we calculate the sequence $x(t, \lambda_j)$, $j = 0, 1, \dots, m_*$, using methods, described in the sections 1, 2. Let $\lambda_{m_*} = a$. Let us introduce sets of knots $x_k^* = ka/s$, $k = 0, 1, \dots, s$, $s = m_*, m_* + 1, \dots$. One can construct Bernstein polynomial $B_s(x(t, \lambda), \lambda)$ on the set $\lambda_k^s, \lambda_k^s = ka/s$, $k = 0, 1, \dots, s$, $s = m_*, m_* + 1, \dots$. It follows from Kantorovich theorem, that $\lim_{s \rightarrow \infty} B_s(x(t, \lambda), \lambda) = x(t, \lambda)$ for all $\lambda \in (-\infty, \infty)$. So, $\lim_{s \rightarrow \infty} B_s(x(t, 1), 1) = x(t, 1)$. We construct numerical method for solution of the equation (1) when solution $x(t, \lambda)$ of the equation (2) is a whole function with respect to variable λ .

5. Solution of ill-posed problems

Homotopy method can be applied for solution of Fredholm integral equations of the first kind. One can apply the homotopy method for linear and non-linear Fredholm integral equation of the first kind.

Let us consider linear integral equation of the first kind

$$Kx \equiv \int_0^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t). \quad (15)$$

Put in correspondence of this equation the Fredholm equation of the second kind with the parameter p ($0 \leq p \leq 1$)

$$\left(1 + \frac{1}{m} - p\right)x(t, p) + \left(p - \frac{1}{m}\right) \int_0^1 h(t, \tau)x(\tau)x(\tau, p)d\tau = f(t). \quad (16)$$

Introduce the $p_k = k/m$, $k = 0, 1, \dots, m$ and consider the set of equations

$$\left(1 + \frac{1}{m} - p_k\right)x(t, p_k) + \left(p_k - \frac{1}{m}\right) \int_0^1 h(t, \tau)x(\tau)x(\tau, p_k)d\tau = f(t), \quad k=0, 1, \dots, m. \quad (17)$$

Solving the set of equation (17) we receive the set of solutions $x(t, p_k)$, $k=0, 1, \dots, m$. Let us construct the Bernstein polynomial

$$B_m(p) = \sum_{k=0}^m C_m^k x(t, p_k) p^k (1-p)^{m-k}.$$

If the $x(t, p)$ is a intire function with respect to variable p , or if the $x(t, p)$ is a analytical function on the segment $[-\alpha, 1 + \alpha]$, α is positive constant, the function $x(t, 1+m^{-1})$ is the approximate solution of the equation (15).

Remark 1. Instead of the equation (15) the equation $K^* = Kx = K^*f$ can be considered where K^* is the conjugate operator.

Similar argorithm can be applied for solution of nonlinear Fredholm integral equations of the first kind

$$\int_0^1 h(t, \tau, x(\tau))d\tau = f(t). \quad (18)$$

The corresponding equation (18) is put into the set of Fredholm integral equations of the second kind

$$\left(1 + \frac{1}{m} - p_k\right)x(t, p_k) + \left(p_k - \frac{1}{m}\right) \int_0^1 h(t, \tau, x(\tau, p_k))d\tau = f(t), \quad (19)$$

$k=0, 1, \dots, m$, $p_k = k/m$, m – integer.

The approximate solution of the equation (18) from Bernstein polynomial $B_m(1 + \frac{1}{m})$ is obtained as; $B_m(p) = \sum_{k=0}^m C_m^k x(t, p_k) p^k (1-p)^{m-k}$.

In practice the equations (17) and (19) are approximated with the mechanical quadrature method.

6. Example

Let us consider the integral equation

$$x(t) + \int_0^{2\pi} [1 + \cos \tau + (\cos t)(\cos \tau)]x^2(\tau)d\tau = \pi + \sin t \quad (1)$$

with the exact solution $\sin t$.

For approximate solution of the equation (1) we shall seek as polynom

$$x_N(t) = \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k \psi_k(t), \quad (2)$$

$$\psi_k(t) = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin(2N+1)\frac{t-t_k}{2}}{\sin\frac{t-t_k}{2}}, \quad t_k = \frac{2k\pi}{2N+1}, \quad k=0,1,\dots,2N.$$

Coefficients α_k are found from the system of nonlinear algebraic equations

$$\alpha_k + \frac{2\pi}{2N+1} \sum_{l=0}^{2N} [1 + \cos t_l + (\cos t_k)(\cos t_l)]\alpha_l^2 = \pi + \sin \frac{2k\pi}{2N+1}, \quad (3)$$

$k=0,1,\dots,2N$.

In the operator form the system (3) can be written as

$$P'_N[x_N(t) + \int_0^{2\pi} P_N^\tau [1 + \cos \tau + (\cos t)(\cos \tau)]x_N^2(\tau)d\tau] = P'_N[\pi + \sin t], \quad (4)$$

where $P_N[f]$ is the operator from $\tilde{C}[0, 2\pi]$ to the set of interpolation polynomials

$$f_N(t) = \sum_{k=0}^{2N} f(t_k)\psi_k(t).$$

So, homotopy method can be written in operator form as

$$P'_L[x_N(t) + \int_0^{2\pi} P_L^\tau [(1-\lambda_j)(1 + \cos \tau + (\cos t)(\cos \tau))x_N(\tau) + \lambda_j(1 + \cos \tau + (\cos t)(\cos \tau))x_N^2(\tau)]d\tau] = P'_L[\pi + \sin t], \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (5)$$

Let $\lambda_0 = 0$, $\lambda_j = \frac{j}{M}$, $\lambda_j = \frac{j}{M}$, $M=\text{const}$, $j=1,2,\dots,M$.

The linear equation

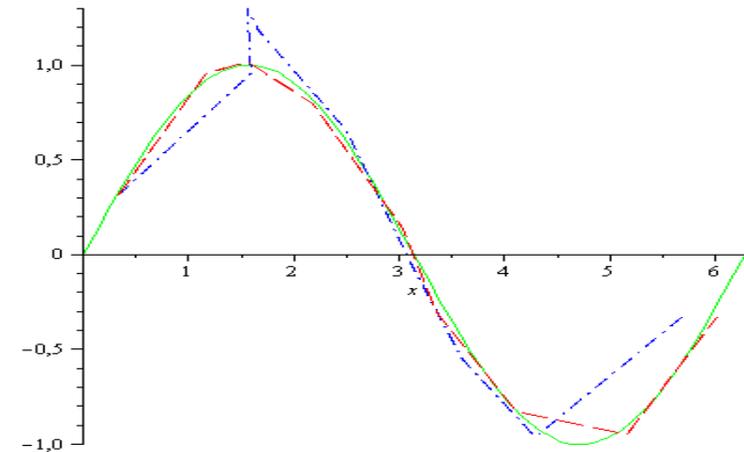
$$P'_N[x_N(t) + \int_0^{2\pi} P_N^\tau [(1 + \cos \tau + (\cos t)(\cos \tau))x_N(\tau)]d\tau] = P'_N[\pi + \sin t], \quad (6)$$

can be solved for $j=0$.

Solution $x_{0,N}(t)$ of the equation (6) is a initial condition for the equation (5) for λ_1 . Solution $x_{1,N}(t)$ of the equation (5) for λ_1 is the initial condition for

the equation (5) for λ_2 and so on. Solution $x_{j,N}(t)$ of the equation (5) for λ_j is found with the Newton-Kantorovich method with initial condition $x_{j-1,N}(t)$. Solution $x_{M,N}(t)$ of the equation (5) for λ_M is the approximate solution of the equation (1).

The results of calculation for $N=4$ are given on the Figure 1. Here the exact solution is given with continuous line, the solution of the linear equation is given as shot dotted line, approximate solution of the equation (1) with homotopy method is given as long dotted line.



Comparison between the results from Example. Continuous lines: exact solution, shot dotted line: the solution of the linear equation, long dotted line: approximate solution of the equation (1) with homotopy method

7. Conclusion

In the paper two homotopy methods for solution of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the first and second kinds are presented. It is well known that there are not sufficient conditions for varification of convergence of homotopy methods. If the proposed homotopy methods are not convergence for solution of a given equation, the method of continuation of solution with Bernstein polynomials is considered. Some numerical examples confirm efficiency of methods.

References

1. Poincaré H. Sur les courbes définies par une équation différentielle I (1881), Oeuvres I., Gauthier-Villars (1951).

2. Bernstein S.N. Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles des second ordre, *Math. Ann.*, 59 (1904) pp. 20 – 76.
3. Bernshtein S.N. Collected works, 3, Moscow (1960) (In Russian).
4. Richter S.L., DeCarlo R.A. Continuation methods: theory and applications *IEEE Trans. AC*, 28 (1983) pp., 660 – 665.
5. Wacker H. (ed.), *Continuation methods*, Acad. Press (1978).
6. Zhulin S.S., Homotopy Method for Finding Extremals in Optimal Control Problems, *Differential Equations*, 2007, Vol. 43, No. 11, pp. 1495–1504.
7. Shalashilin V.L. and Kuznetsov E.B. Metod prodolzheniya resheniya po parametru i nailuchshaya parametrizatsiya (Method of Parameter Extension of a Solution). – Moscow, 1999.
8. Lahage M.E. Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes // *Compter Rendas hebdomataires des seances de L'Academie des sciences.* – 1934. – V. 198. – N 21. – P. 1840 – 1842.
9. Fock V.A. The diffraction of radio waves around the earth's surface // Moscow-Leningrad: Publishing house of Academia of Science of USSR. – 1946. – P. 42 – 44.
10. Davidenko D.F. An application of the method of variation of parameters to the construction of iterative formulas of increased accuracy for numerical solutions of nonlinear integral equations, *Soviet Math. Dokl.*, 6 : 3 (1965) pp. 702–706 *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 162 : 3 (1965) pp. 499–502.
11. Davidenko D.F. On a new numerical solution method for systems of nonlinear equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 88 : 4 (1953) pp. 601–602 (In Russian).
12. Davidenko D.F. Application of the method of variation of parameters to the theory of nonlinear functional equations, *Ukrain Mat. Zh.*, 7 (1955). – pp. 18 – 28 (In Russian).
13. Krasnosel'skii M.A., Rutitski Ja.B., Stecenko V.Ja., Vainikko G.M., Zabreiko P.P. *Approximate Solutions of Operator Equations*, Groningen: Walters-Noordhoff Publ. – 484 p., 1972.
14. Boykov I.V. *Approximate Methods of Solution of Singular Integral Equations*, The Penza State University, Penza, 2004 (in Russian).
15. Natanson I.P. *Constructive function theory, V.1. Uniform approximation*, Ungar, New York, 1964.
16. Faydaoglu S. and Ozis T. Periodic solutions for certain non-smooth oscillators with highly nonlinearities, (in review).

**РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ
МНОГОМЕРНЫХ ПО ВХОДУ И ВЫХОДУ РАЗНОГО ПОРЯДКА
ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
С ПОМЕХАМИ НАБЛЮДЕНИЙ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ**

И.Л. Сандлер, О.А. Кацюба

Самарский государственный университет путей сообщения,
г.Самара, Россия

Рассматривается рекуррентный алгоритм, который позволяет получить сильно состоятельные оценки параметров многомерных по входу и выходу разного порядка линейных динамических систем с помехами в выходных сигналах.

Постановка задачи.

Рассмотрим многомерную динамическую систему с дискретным временем ($i = \dots, -1, 0, 1, \dots$), которая описывается следующим уравнением:

$$z_i^{(n)} - \sum_{m=1}^{\bar{r}_m} b_0^{(mn)}(n) z_{i-m}^{(n)} = \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq n}}^k \sum_{m=1}^{\bar{r}_l} b_0^{(ml)}(n) z_{i-m}^{(l)} + \sum_{j=1}^d \sum_{m=0}^{r_{nj}} a_0^{(mj)}(n) x_{i-m}^{(j)}, \quad (1)$$

$$y_i^{(l)} = z_i^{(l)} + \xi_1^{(l)}(i),$$

где $n = \overline{1, k}$,

$y_i^{(l)}, z_i^{(l)}$ – наблюдаемые и ненаблюдаемые выходные сигналы, $l = \overline{1, k}$;

k – число выходных переменных;

$b_0^{(ml)}(n), a_0^{(mj)}(n)$ – параметры линейного разностного уравнения;

$x_i^{(j)}$ – ненаблюдаемый входной сигнал, $j = \overline{1, d}$;

d – число входных переменных;

$\xi_1^{(l)}(i)$ – помеха наблюдений в l -м выходном сигнале.

Требуется определить оценки неизвестных коэффициентов динамического объекта, описанного уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям $\{y_i^{(l)}\}, \{x_i^{(j)}\}$.

Пусть выполняются следующие условия:

1⁰. Множество \tilde{B} , которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой линейной системы, является компактом.

2⁰. Помеха $\{\xi_1^{(l)}(i)\}$, статистически независимая последовательность и стационарная в совокупности в узком смысле с $E(\xi_1^{(l)}(i)) = 0$,

$E\left[\left\{\xi_1^{(l)}(i)\right\}^2\right] = \left(\sigma^{(l)}\right)^2 > 0$, и для некоторых постоянных

$\pi_{\xi_1^{(l)}} : \left|\xi_1^{(l)}(i)\right| < \pi_{\xi_1^{(l)}}$, где E – оператор математического ожидания.

3⁰ $\{x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(d)}\}$ статистически не зависят от $\{\xi_1^{(l)}(i)\}$.

4⁰. Последовательности $\{x_i^{(j)}\}$ – стационарные в совокупности в узком смысле с дробно-рациональной плотностью случайные сигналы с $E\left[\left(x_i^{(j)}\right)^2\right] > 0$ и для некоторого $\pi_x^{(j)} > 0 : \left|x_i^{(j)}\right| < \pi_x^{(j)}$ п.н.

5⁰. Выполняются условие несократимости полиномов

$$B^{(n)}(q^{-1}) = 1 - \sum_{m=1}^{\bar{r}_m} b_0^{(mm)} \cdot q^{-m}, \quad A^{(j)}(q^{-1}) = \sum_{m=0}^{\bar{r}_{nj}} a_0^{(mj)} \cdot q^{-m},$$

$$B^{(l)}(q^{-1}) = \sum_{m=1}^{\bar{r}_{nl}} b_0^{(ml)} \cdot q^{-m},$$

где q^{-1} – оператор сдвига назад, $q^{-1}x_i = x_{i-1}$

Требуется рекуррентно определить оценки неизвестных коэффициентов динамической системы, описываемых уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям $\{y_i^{(l)}\}$, $\{x_i^{(j)}\}$.

В [1] показано, что оценки будут сильно состоятельные при следующем критерии:

$$\min_{\left(\frac{b(n)}{a(n)}\right) \in \tilde{B}} \lim_{i \rightarrow \infty} E \left[\frac{\left[y_i^{(n)} - \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right)^T \left(\frac{Y_{\bar{r}_{nk}}(i-1)}{X_{\bar{r}_{nd}}(i)} \right) \right]^2}{\sigma_n^2 + b(n) D_1(n) b^T(n)} \right], \quad (2)$$

где

$$Y_{\bar{r}_{nk}}(i-1) = \left(y_{\bar{r}_{n1}}^{(1)T} \dots y_{\bar{r}_{nk}}^{(k)T} \right),$$

$$X_{\bar{r}_{nd}}(i) = \left(x_{\bar{r}_{n1}}^{(1)T} \dots x_{\bar{r}_{nd}}^{(d)T} \right),$$

$$y_{\bar{r}_{nl}}^{(l)}(i) = \left(y_{i-1}^{(l)}, \dots, y_{i-\bar{r}_{nl}}^{(l)} \right)^T,$$

$$x_{\bar{r}_{nj}}^{(j)}(i) = \left(x_i^{(j)}, \dots, x_{i-\bar{r}_{nj}}^{(j)} \right)^T,$$

$$\begin{aligned}
D_1(n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Xi_{\bar{r}_n}(i) \Xi_{\bar{r}_n}^T(i), \\
\Xi_{\bar{r}_n}(i-1) &= \left(\Xi_{\bar{r}_{n_1}}^T \dots \Xi_{\bar{r}_{n_k}}^T \right)^T, \\
\Xi_{\bar{r}_{n_l}}(i-1) &= \left(\xi_1^{(l)}(i-1), \dots, \xi_1^{(l)}(i-\bar{r}_{n_l}) \right)^T, \\
b(n) &= \left(\left(b^{(1)}(n) \right)^T \dots \left(b^{(k)}(n) \right)^T \right)^T, \\
a(n) &= \left(\left(a^{(1)}(n) \right)^T \dots \left(a^{(d)}(n) \right)^T \right)^T, \quad k \neq n, \\
b^{(l)}(n) &= \left(b^{(1l)}(n), \dots, b^{(r_{nl})}(n) \right)^T, \\
a^{(j)}(n) &= \left(a^{(0j)}(n), \dots, a^{(n_{jl})}(n) \right)^T.
\end{aligned}$$

Тогда оценки неизвестного вектора параметров $\begin{pmatrix} \hat{b}_i(n) \\ \hat{a}_i(n) \end{pmatrix}$ можно

получить с помощью стохастически градиентного алгоритма:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_{i+1}(n) \\ \hat{a}_{i+1}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_i(n) \\ \hat{a}_i(n) \end{pmatrix} - \alpha_i \nabla_{\begin{pmatrix} b(n) \\ a(n) \end{pmatrix}} \left[\frac{\left(y_{i+1}^{(n)} - \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right)^2 \frac{Y_{\bar{r}_{nk}}(i+1)}{X_{\bar{r}_{nd}}(i+1)}}{\omega(\hat{b}_i(n), \hat{a}_i(n))} \right], \quad (3)$$

где $\omega(\hat{b}_i(n), \hat{a}_i(n)) = \sigma_n^2 + b_i(n) D_1(n) b_i^T(n)$,

α_i – последовательность, для которой выполняется условие.

$$\alpha^0 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^t < \infty, \quad \text{при } t > 1.$$

Теорема. Пусть динамическая система описывается уравнением (1) и выполняются предположения 1⁰–6⁰. Тогда оценки, определяемые ал-

горитмом (3), либо $\begin{pmatrix} \hat{b}_i(n) \\ \hat{a}_i(n) \end{pmatrix} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} b_0(n) \\ a_0(n) \end{pmatrix}$ п.н, либо $\begin{pmatrix} \hat{b}_i(n) \\ \hat{a}_i(n) \end{pmatrix} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$

Библиографический список

1. Кацюба О.А., Козлов Е.В. Оценивание параметров многосвязных разного порядка линейных динамических систем при наличии помех во входных и выходных сигналах в условиях априорной неопределенности // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». – №2 (26). – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – С. 52 – 59.
2. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука, 1967. – 632 с.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.В. Глухова, Н.Ю. Кудряшова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Дана сфера S с центром в начале координат радиуса R , в шаре $D \subset D^*$, ограниченном поверхностью S задана гармоническая функция $\vec{\phi} = \vec{i}\phi_1(x, y, z) + \vec{j}\phi_2(x, y, z) + \vec{k}\phi_3(x, y, z)$. Требуется найти приближённые значения функции $\vec{\phi}$ во всей области D^* . Считаем, что функции $\phi_1(x, y, z), \phi_2(x, y, z), \phi_3(x, y, z) \in H_{\alpha, \alpha, \alpha}$.

Выберем в области D^* сферу S_1 с центром в начале координат и радиусом $R+h$, ограничивающую шар D_1 , такой что $D \subset D_1$. Если функция $\vec{\phi}(r)$ аналитическая в области D_1 , то её значения внутри этой области определяются формулой

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[(n \bullet \phi(r)) \text{grad} \frac{1}{|r-r_1|} + [n \times \phi(r)] \times \text{grad} \frac{1}{|r-r_1|} \right] ds = \begin{cases} \phi(r_1), r_1 \in D_1; \\ 0, r_1 \in \overline{D_1}^c. \end{cases} \quad (1)$$

$r = (x, y, z) \in S_1$, $r_1 = (x_1, y_1, z_1) \in S$, n – вектор нормали к поверхности S_1 , $\overline{D_1}$ – дополнение D_1 до R_3 [1]. Решая (1), определяем аналитическое продолжение со сферы S на сферу S_j . Аналогично восстановим функцию во всей области D^* .

Рассмотрим интеграл

$$I\phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[(n \bullet \phi(r)) \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r_1|} + [n \times \phi(r)] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|r-r_1|} \right] ds, \quad (2)$$

где r_1 – точка, расположенная внутри S . Перейдём в (2) к сферическим координатам: $x = (R+h)\cos t$, $y = (R+h)\sin t \cos \theta$, $z = (R+h)\sin t \sin \theta$, $0 \leq t \leq \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Тогда вектор нормали $\vec{n} = \{\cos t, \sin t \cos \theta, \sin t \sin \theta\}$,

$$1/|r-r_1| = 1/\left[((R+h)\cos t - R\cos t')^2 + ((R+h)\sin t \cos \theta - R\sin t' \cos \theta')^2 + ((R+h)\sin t \sin \theta - R\sin t' \sin \theta')^2 \right]^{1/2}.$$

Для краткости введём обозначения: $g_1 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|r-r_1|}$, $g_2 = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|r-r_1|}$,

$$g_3 = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|r-r_1|}$$

$$g_1(t, \theta, t', \theta') = -\frac{(R+h)\cos t - R\cos t'}{\left[((R+h)\cos t - R\cos t')^2 + ((R+h)\sin t \cos \theta - R\sin t' \cos \theta')^2 + ((R+h)\sin t \sin \theta - R\sin t' \sin \theta')^2 \right]^{3/2}}, \quad (3)$$

$$g_2(t, \theta, t', \theta') = -\frac{(R+h)\sin t \cos \theta - R\sin t' \cos \theta'}{\left[((R+h)\cos t - R\cos t')^2 + ((R+h)\sin t \cos \theta - R\sin t' \cos \theta')^2 + ((R+h)\sin t \sin \theta - R\sin t' \sin \theta')^2 \right]^{3/2}}, \quad (4)$$

$$g_3(t, \theta, t', \theta') = -\frac{(R+h)\sin t \sin \theta - R\sin t' \sin \theta'}{\left[((R+h)\cos t - R\cos t')^2 + ((R+h)\sin t \cos \theta - R\sin t' \cos \theta')^2 + ((R+h)\sin t \sin \theta - R\sin t' \sin \theta')^2 \right]^{3/2}}, \quad (5)$$

где точки $(R+h, t, \theta) \in S_1$, а $(R, t', \theta') \in S$. Тогда интеграл будет иметь вид

$$\begin{aligned}
I\phi = & -\frac{(R+h)^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{aligned} & \phi_1(R+h,t,\theta) \cos t + \phi_2(R+h,t,\theta) \sin t \cos \theta + \\ & + \phi_3(R+h,t,\theta) \sin t \sin \theta \end{aligned} \right\} \times \\
& \times \left(\bar{i}g_1(t,\theta,t',\theta') + \bar{j}g_2(t,\theta,t',\theta') + \bar{k}g_3(t,\theta,t',\theta') \right) + \bar{i}[(\phi_1(R+h,t,\theta) \sin t \sin \theta - \\
& - \phi_3(R+h,t,\theta) \cos t)g_3(t,\theta,t',\theta') - \\
& - (\phi_2(R+h,t,\theta) \cos t - \phi_1(R+h,t,\theta) \sin t \cos \theta)g_2(t,\theta,t',\theta')] + \bar{j}[(\phi_2(R+h,t,\theta) \cos t - \\
& - \phi_1(R+h,t,\theta) \sin t \cos \theta) \times \\
& \times g_1(t,\theta,t',\theta') - (\phi_3(R+h,t,\theta) \sin t \cos \theta - \phi_2(R+h,t,\theta) \sin t \sin \theta)g_3(t,\theta,t',\theta')] + \\
& + \bar{k}[(\phi_3(R+h,t,\theta) \sin t \cos \theta - \\
& - \phi_2(R+h,t,\theta) \sin t \sin \theta)g_2(t,\theta,t',\theta') - (\phi_1(R+h,t,\theta) \sin t \sin \theta - \\
& - \phi_3(R+h,t,\theta) \cos t)g_1(t,\theta,t',\theta')] \} \sin t dt d\theta. \tag{6}
\end{aligned}$$

Построим кубатурную формулу для вычисления интеграла (6).
Для этого выберем узлы:

$$t_k = \frac{\pi k}{N}, \quad \theta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 1, \dots, N. \tag{7}$$

Кубатурная формула будет иметь вид

$$\begin{aligned}
S\phi = & -\frac{(R+h)^2 \pi}{2N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^N \{ (\phi_1(R+h,t_i,\theta_p) \cos t_i + \phi_2(R+h,t_i,\theta_p) \sin t_i \cos \theta_p + \\
& + \phi_3(R+h,t_i,\theta_p) \sin t_i \sin \theta_p) (\bar{i}g_1(t_i,\theta_p,t',\theta') + \\
& + \bar{j}g_2(t_i,\theta_p,t',\theta') + \bar{k}g_3(t_i,\theta_p,t',\theta')) + \bar{i}[(\phi_1(R+h,t_i,\theta_p) \sin t_i \sin \theta_p - \\
& - \phi_3(R+h,t_i,\theta_p) \cos t_i)g_3(t_i,\theta_p,t',\theta') - \\
& - (\phi_2(R+h,t_i,\theta_p) \cos t_i - \phi_1(R+h,t_i,\theta_p) \sin t_i \cos \theta_p)g_2(t_i,\theta_p,t',\theta')] + \bar{j}[(\phi_2(R+h,t_i,\theta_p) \cos t_i - \\
& - \phi_1(R+h,t_i,\theta_p) \sin t_i \cos \theta_p) \times \\
& \times g_1(t_i,\theta_p,t',\theta') - (\phi_3(R+h,t_i,\theta_p) \sin t_i \cos \theta_p - \phi_2(R+h,t_i,\theta_p) \sin t_i \sin \theta_p)g_3(t_i,\theta_p,t',\theta')] + \\
& + \bar{k}[(\phi_3(R+h,t_i,\theta_p) \sin t_i \cos \theta_p - \\
& - \phi_2(R+h,t_i,\theta_p) \sin t_i \sin \theta_p)g_2(t_i,\theta_p,t',\theta') - (\phi_1(R+h,t_i,\theta_p) \sin t_i \sin \theta_p - \\
& - \phi_3(R+h,t_i,\theta_p) \cos t_i)g_1(t_i,\theta_p,t',\theta')] \} \sin t_i + R_N. \tag{8}
\end{aligned}$$

Справедлива оценка разности между интегралом (6) и кубатурной формулой (8): $|R_N| \leq \frac{A(2R+h)^3}{h^3} \left(\frac{1}{N^\alpha} + \frac{\max|\phi|}{N} + \frac{\max|\phi|(2R+h)^2}{Nh^3} \right)$.

Перейдём к приближённому решению интегрального уравнения (1). Задача сводится к решению следующей системы из трёх интегральных уравнений

$$\begin{aligned} & -\frac{(R+h)^2}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{ \phi_1(R+h, t, \theta) [g_1(t, \theta, t', \theta') \cos t + \\ & + g_3(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta + g_2(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta] + \\ & + \phi_2(R+h, t, \theta) [g_1(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta - g_2(t, \theta, t', \theta') \cos t] + \\ & + \phi_3(R+h, t, \theta) [g_1(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta - \\ & - g_3(t, \theta, t', \theta') \cos t] \} \sin t dt d\theta = \phi_1(R, t', \theta'), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{(R+h)^2}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{ \phi_1(R+h, t, \theta) [g_2(t, \theta, t', \theta') \cos t - g_1(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta] + \\ & + \phi_2(R+h, t, \theta) [g_2(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta + \\ & + g_1(t, \theta, t', \theta') \cos t + g_3(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta] + \\ & + \phi_3(R+h, t, \theta) [g_2(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta - \\ & - g_3(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta] \} \sin t dt d\theta = \phi_2(R, t', \theta'), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{(R+h)^2}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{ \phi_1(R+h, t, \theta) [g_3(t, \theta, t', \theta') \cos t - g_1(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta] + \\ & + \phi_2(R+h, t, \theta) [g_3(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta - g_2(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta] + \\ & + \phi_3(R+h, t, \theta) [g_3(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta + \\ & + g_1(t, \theta, t', \theta') \cos t + g_2(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta] \} \sin t dt d\theta = \phi_3(R, t', \theta'). \end{aligned} \quad (11)$$

Эту систему решаем методом коллокации. За узлы коллокации возьмём узлы кубатурной формулы (7). Решение ищем в виде полинома

$$\phi_k(t, \theta) = \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^N \phi_k(R+h, t_i, \theta_p) \psi_i(t) \psi_p(\theta), \quad k=1,2,3,$$

где ψ_i – i -й фундаментальный полином Лагранжа, $\phi_k(R+h, t_i, \theta_p)$ найдём из следующей системы:

$$\begin{aligned}
& -\frac{(R+h)^2 \pi}{2N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^N \{ \phi_1(R+h, t_i, \theta_p) [g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i + \\
& + g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p + g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p] + \\
& + \phi_2(R+h, t_i, \theta_p) [g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p - g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i] + \\
& + \phi_3(R+h, t_i, \theta_p) [g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p - \\
& - g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i] \} \sin t_i = \phi_1(R, t_i, \theta_m), \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(R+h)^2 \pi}{2N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^N \{ \phi_1(R+h, t_i, \theta_p) [g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i - \\
& - g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p] + \\
& + \phi_2(R+h, t_i, \theta_p) [g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p + g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i + \\
& + g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p] + \\
& + \phi_3(R+h, t_i, \theta_p) [g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p - \\
& - g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p] \} \sin t_i = \phi_2(R, t_i, \theta_m), \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(R+h)^2 \pi}{2N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^N \{ \phi_1(R+h, t_i, \theta_p) [g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i - g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p] + \\
& + \phi_2(R+h, t_i, \theta_p) [g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p - \\
& - g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p] + \\
& + \phi_3(R+h, t_i, \theta_p) [g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p + g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i + \\
& + g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p] \} \sin t_i = \\
& = \phi_3(R, t_i, \theta_m), i, p, l, m = 1, \dots, N. \quad (14)
\end{aligned}$$

Запишем эту систему в матричной форме: $Ax=b$. Решим её следующим итерационным методом:

$$x^{m+1} = \alpha_m x^m + (1 - \alpha_m)(x^m - \gamma(\beta x^m + A^* Ax^m - A^* b)),$$

m – номер итерации, $0 < \alpha < \alpha_m < 1 - \beta < 1$, A^* – матрица, сопряжённая

$$\kappa A, \gamma = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2 \|A^* A\|} \right\}.$$

Для устойчивой сходимости метода достаточно условия $\|I - \gamma A^* A\| \leq 1$ [2].

Решение многочисленных модельных примеров доказало эффективность предложенного алгоритма.

Библиографический список

1. Жданов М.С. Аналоги интегралов типа Коши в теории геофизических полей. – М.: Наука, 1984. – 124 с.
2. Обломская Л.Я. О методах последовательных приближений для линейных уравнений в банаховых пространствах // ЖМВ и МФ. – 1986. – Т. 8. – №2 – С. 417 – 426.

**РЕТРОСПЕКТИВНАЯ ЗАДАЧА О СТРУКТУРЕ
НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ
В ДВУСЛОЙНОМ ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ СТЕРЖНЕ**

Т.В. Елисеева, Ю.Ю. Новикова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Пусть функция $u(x, t) = \theta(x)\theta(l-x)u_1(x, t) + \theta(x-l)u_2(x, t)$ в области $D_1^+ = \{(x, t) | x \in (0; l) \cup (l; +\infty); t \in (0; +\infty)\}$ удовлетворяет уравнению

теплопроводности

$$u_i' = u_{ixx}''', i = 1, 2, \quad (1)$$

условию в известный момент времени $t=T$

$$u_i(x, T) = f_i(x), \quad (2)$$

граничному условию вида

$$u_1(0, t) = \mu(t) \quad (3)$$

и условиям сопряжения

$$u_1(l, t) = u_2(l, t), \quad k \frac{\partial u_1}{\partial x}(l, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(l, t), \quad k > 0, \quad (4)$$

или

$$u_1(l, t) - u_2(l, t) = \tilde{u}(0, t), \quad k \frac{\partial u_1}{\partial x}(l, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(l, t), \quad k > 0, \quad k \neq 1, \quad (5)$$

где $u_1(l, t)$, $u_2(l, t)$, $\frac{\partial u_1}{\partial x}(l, t)$, $\frac{\partial u_2}{\partial x}(l, t)$ – предельные значения функции

$u = u(x, t)$ и ее производных в области D_1^+ , а $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t)$ – ограниченная в полуплоскости $D = \{(x, t) | x > 0, t > 0\}$ функция такая, что существует предельное значение этой функции при $x = 0$. Требуется найти распре-

деление температуры в начальный момент времени $u(x,0) = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \theta(x)\theta(l-x)\varphi_1(x) + \theta(x-l)\varphi_2(x)$. Решение нашего уравнения будем искать при нулевом граничном условии, т.е. $u_1(0,t) = 0$.

В качестве модельной рассмотрим задачу в области D

$$\tilde{u}'_t = \tilde{u}''_{xx} \quad (6)$$

при соответствующих условиях

$$\tilde{u}(x,T) = \tilde{f}(x), \quad \tilde{u}(0,t) = 0. \quad (7)$$

Необходимо определить температуру в начальный момент времени $\tilde{u}(x,0) = \tilde{\varphi}(x)$.

Решение модельной задачи сводится к интегральному уравнению[1]

$$\tilde{u}(x,T) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4T}} \right\} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi. \quad (8)$$

Операторы преобразования, связывающие функции $u(x,t)$ и $\tilde{u}(x,t)$

при условиях $u(0,t) = \tilde{u}(0,t)$ и (4), имеют вид [2]:

$$u(x,t) = \Pi_x [\tilde{u}(x,t)] = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^j \left(\tilde{u}(x+2lj,t) - \frac{1-k}{1+k} \tilde{u}(2l-x+2lj,t) \right), & 0 < x < l, \\ \frac{2k}{1+k} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^j \tilde{u}(x+2lj,t), & x > l, \end{cases} \quad (9)$$

при условиях $u(0,t) = 0$ и (5) вид [2]:

$$u(x,t) = L[\tilde{u}(x,t)] = \begin{cases} \frac{1}{1+k} \tilde{u}(l-x,t) - \frac{1}{1-k} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^j \left[\tilde{u}(x-l+2lj,t) - \frac{1-k}{1+k} \tilde{u}(l-x+2lj,t) \right], & 0 < x < l, \\ -\frac{k}{1+k} \tilde{u}(x-l,t) - \frac{2k}{1-k^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^j \tilde{u}(x-l+2lj,t), & x > l, \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, решение задачи (1) – (4) сводится к системе интегральных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^j \left(\int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(x+2lj-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(x+2lj+\xi)^2}{4T}} - \frac{1-k}{1+k} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(e^{-\frac{(2l-x+2lj-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(2l-x+2lj+\xi)^2}{4T}} \right) \right\} \Pi_x^{-1} [\varphi(\xi)] d\xi \right) = f_1(x), \\ & \frac{k}{(1+k)\sqrt{\pi T}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^j \left(\int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(x+2lj-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(x+2lj+\xi)^2}{4T}} \right\} \Pi_x^{-1} [\varphi(\xi)] d\xi \right) = f_2(x), \end{aligned} \right. \quad (11)$$

где Π_x^{-1} – операторы преобразования, обратные к Π_x .

Далее воспользуемся операторным методом и сведем нашу задачу для неоднородной среды к задаче для однородной области, т.е. к уравнению (8) относительно неизвестной $\tilde{\varphi}(\xi)$. Затем по известному решению модельной задачи получим решение исходной краевой задачи в кусочно-однородной полуплоскости, применив операторы преобразования Π_x .

Аналогично решение задачи (1) – (3), (5) сводится к системе вида:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2(1+k)\sqrt{\pi T}} \cdot \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(l-x-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(l-x+\xi)^2}{4T}} \right\} L^{-1} [\varphi(\xi)] d\xi - \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} \times \\ & \times \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^j \left(\int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-l+2lj-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(x-l+2lj+\xi)^2}{4T}} - \frac{1-k}{1+k} \cdot \left(e^{-\frac{(l-x+2lj-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(l-x+2lj+\xi)^2}{4T}} \right) \right\} L^{-1} [\varphi(\xi)] d\xi \right) = f_1(x), \\ & \frac{k}{2(1+k)\sqrt{\pi T}} \cdot \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-l-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(x-l+\xi)^2}{4T}} \right\} L^{-1} [\varphi(\xi)] d\xi - \frac{k}{(1-k^2)\sqrt{\pi T}} \times \\ & \times \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^j \left(\int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-l+2lj-\xi)^2}{4T}} - e^{-\frac{(x-l+2lj+\xi)^2}{4T}} \right\} L^{-1} [\varphi(\xi)] d\xi \right) = f_2(x), \end{aligned} \right. \quad (12)$$

где L^{-1} – операторы преобразования, обратные к L . Система (12) может быть решена описанным выше способом.

Для решения уравнения (8) была применена итерационная схема [3]

$$x_{n+1} = x_n - \gamma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b h(t-\tau) x_n(\tau) d\tau - f(t), \quad a \leq t \leq b, \quad n=0,1,\dots,$$

где γ выбирается из условия $q = \sup_{-\infty < \omega < \infty} |1 - \gamma H^*(\omega)| \leq 1$.

Библиографический список

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. – 798 с.
2. Яремко О.Э., Елисеева Т.В. Операторы преобразования в теории смешанных краевых задач кусочно-однородных структур. – М.: Труды Средневолжского математического общества. – 2005. – Т. 7. – №1. – С. 223 – 231.
3. Бойков И.В. Итерационные методы решения уравнений в свертках. – М.: Известия вузов. Математика, 1998. – С. 8 – 15.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

И.А. Алимова, Н.Ю. Кудряшова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Пусть на комплексной плоскости дана область G , ограниченная замкнутой кривой L . Пусть $G \subset G^*$. Пусть в области G^* задана аналитическая функция $x(z)$, значения которой известны только в области G . Требуется распространить $x(z)$ из области G на G^* .

Метод, который будет изложен ниже, может быть применен к произвольному гладкому контуру. Для простоты будем рассматривать в качестве контура L единичную окружность на комплексной плоскости. Обозначим единичную окружность на комплексной плоскости через γ_0 . Сначала будем искать приближенные значения функции $x(z)$ на контуре γ_1 , который представляет собой окружность радиуса $1+h$, используя значения функции $x(z)$ на единичной окружности. Для этого нужно решить следующее уравнение:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau = x(t), t \in \gamma_0. \quad (1)$$

Это уравнение представляет собой формулу Коши. Проведя несложные вычисления в (1), придем к следующему уравнению:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x((1+h)e^{i\sigma})(1+h)e^{i\sigma}}{(1+h)e^{i\sigma} - e^{is}} d\sigma = x(e^{is}). \quad (2)$$

Уравнение (2) будем решать методом коллокации. В качестве узлов коллокации возьмем $t_k = e^{is_k}, k = 0, \dots, 2n$, где $s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, k = 0, \dots, 2n$.

Контур $[0, 2\pi)$ будем считать закольцованным, т. е. точка 0 отождествляется 2π . Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде полинома $x_n(t) = x_n((1+h)e^{is}) = \sum_{k=0}^{2n} x_n(t_k^1) \psi_k(s)$, где фундаментальный многочлен $\psi_k(s)$ определяется формулой

$$\psi_k(s) = \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(s-s_k)}{\sin \frac{s-s_k}{2}},$$

а узлы $t_k^1 = (1+h)e^{is_k}, : k = 0, \dots, 2n$.

Выберем целое число ν_1 и для каждого узла s_k построим квадратурную формулу следующего вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x((1+h)e^{i\sigma})(1+h)e^{i\sigma}}{(1+h)e^{i\sigma} - e^{is_k}} d\sigma = R_n + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{k-\nu_1} \frac{x(t_j^1)(1+h)e^{is_j}}{(1+h)e^{is_j} - e^{is_k}} + \frac{2\nu_1}{2n+1} \frac{x(t_k^1)(1+h)e^{is_k}}{(1+h)e^{is_k} - e^{is_k}} + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=k+\nu_1+1}^{2n} \frac{x(t_j^1)(1+h)e^{is_j}}{(1+h)e^{is_j} - e^{is_k}}.$$

Применяя метод коллокации и выше указанную квадратурную формулу для решения уравнения (2), получим СЛАУ, откуда можно будет найти значения $x_n(t_k^1)$. Эта система имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{k-k_1} \frac{x(t_j^1)(1+h)e^{is_j}}{(1+h)e^{is_j} - e^{is_k}} + \frac{2k_1}{2n+1} \frac{x(t_k^1)(1+h)e^{is_k}}{(1+h)e^{is_k} - e^{is_k}} + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=k+k_1+1}^{2n} \frac{x(t_j^1)(1+h)e^{is_j}}{(1+h)e^{is_j} - e^{is_k}} = x(t_k), k = 0, \dots, 2n.$$

Далее, зная значения функции $x(t)$ на окружности радиуса $1+h$, найдем ее значения на окружности радиуса $1+2h$. Продолжая процесс, по значениям $x(t)$ на окружности радиуса $1+lh$ найдем значения этой функции на окружности радиуса $1+h(l+1)$. Приближенное решение находится аналогичным образом, а СЛАУ примет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{k-v_{l+1}} \frac{x(t_j^{l+1})(1+h(l+1))e^{is_j}}{(1+h(l+1))e^{is_j} - (1+hl)e^{is_k}} + \\
& + \frac{2v_{l+1}}{2n+1} \frac{x(t_k^{l+1})(1+h(l+1))e^{is_k}}{(1+h(l+1))e^{is_k} - (1+hl)e^{is_k}} + \\
& + \frac{1}{2n+1} \sum_{j=k+v_{l+1}}^{2n} \frac{x(t_j^{l+1})(1+h(l+1))e^{is_j}}{(1+h(l+1))e^{is_j} - (1+hl)e^{is_k}} = x(t_k^l), k=0, \dots, 2n,
\end{aligned} \tag{3}$$

где узлы $t_k^l = (1+hl)e^{is_k}$, $k=0, \dots, 2n; l=0, 1, \dots$

Пользуясь теоремой Адамара [1], нетрудно убедиться, что выбором параметра $v_{l+1} > \frac{n}{2}$ можно добиться того, чтобы система (3) была однозначно разрешима. Справедлива оценка квадратурной формулы, входящей в (3)

$$|R_n| \leq \frac{A(1+h(l+1))^\alpha}{hn^\alpha} \left(1 + \frac{v_{l+1}}{n}\right) + \max |x((1+h(l+1))e^{i\sigma})| \frac{B}{h^2 n} \left(1 + \frac{v_{l+1}^2}{n}\right).$$

Описанный метод дает достаточно хорошие результаты, однако он неустойчив. Поэтому нами использовалась итерационная регуляризация вычислительной схемы (3). Значения $x_n(t_k^l)$, $k=0, \dots, 2n$, определяются по следующей схеме $x^{m+1} = \alpha_m x^m + (1-\alpha_m)(x^m - \gamma(A^* A x^m - A^* f))$, где m – номер итерации, A^* – сопряженная матрица, $0 < \alpha < \alpha_m < 1 - \beta < 1$, $\beta = (1-\alpha)\gamma$, а параметр $\gamma = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\|A^* A\|}\right)$ [2].

Рассмотрим еще один метод решения задачи аналитического продолжения. Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде полинома $x_n(t) = x_n((1+h)e^{is}) = \sum_{k=0}^{2n} x_n(t_k^*) \psi_k(s)$, где фундаментальный многочлен $\psi_k(s)$ определен выше, а узлы определяются выражением $t_k^* = (1+h)e^{is_k}$, $k=0, \dots, 2n$. Значения $x_n(t_k^*), k=0, \dots, 2n$, определяются из системы алгебраических уравнений

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \frac{x_n(t_k^*) (1+h) e^{is_k}}{(1+h) e^{is_k} - e^{-is_j}} = x(t_j), j = 0, \dots, 2n. \quad (4)$$

Решение многочисленных модельных примеров доказало эффективность предложенных алгоритмов. Например, в качестве функции $x(z)$ возьмем $x(z) = \frac{1}{z-7}$, имеющую особую точку $z_0=7$. Продолжим данную функцию с окружности с радиусом равным 6 и с центром в начале координат на комплексной плоскости на область, отстоящую от особой точки на 0,4; 0,3; 0,2.

В таблице приводятся результаты максимальной погрешности при $n=800$.

Отступ от особой точки	Максимальная погрешность		
	Метод (3)		Метод (4)
	Метод Гаусса-Жордана	Метод итерационной регуляризации	Метод итерационной регуляризации
0,4	0.02448271 (1%)	0.03985755 (1,6%)	0.03682531 (1,5%)
0,3	0.12614341 (3,8%)	0.17482764 (5,3%)	0.16312807 (5%)
0,25	0.27974841 (6,6%)	0.36095430 (9,2%)	0.34276123 (8,6%)

Библиографический список

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
2. Обломская Л.Я. О методах последовательных приближений для линейных уравнений в банаховых пространствах // ЖВМ и МФ. – 1968. – Т. 8. – № 2. – С. 417 – 426.

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н.Ф. Добрынина, Ю.О. Гуськова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Уравнение теплопроводности решается с помощью различных схем, на основе линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Однако очень многие процессы, протекающие при высоких температурах (например, в плазме) имеют коэффициент теплопроводности, который может быть описан в виде нелинейной

функции. Параметры среды могут зависеть от градиента температуры. Например, такая зависимость имеет место при моделировании процесса некоторой химической реакции.

Рассмотрим решение методом сеток краевой задачи для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

$$\rho(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x,t) \quad 0 < x \leq 1, 0 < t \leq T \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ начальное условие} \quad (2)$$

$$u(0,t) = u_1(t) \text{ граничное условие слева} \quad (3)$$

$$u(1,t) = u_2(t) \text{ граничное условие справа} \quad (4)$$

Все функции $u_0(x)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ предполагаются заданными, $r(x,t)$, $k(x,t)$, $f(x,t)$ – достаточно гладкие функции соответственно плотности (диффузности), теплопроводности, теплоемкости, причем

$$0 < c_1 \leq \kappa(x,t) \leq c_2, \quad \rho(x,t) \geq c_3 > 0. \quad (5)$$

Построим пространственно-временную сетку $\Omega_{k,x} = \Omega_k \times \Omega_x$, на которой определим сеточную функцию $y_i^j = y(x_i, t_j)$ для всех узлов

$(x_i, t_j) \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, K - 1$. Дифференциальное выражение

на каждом временном слое, т.е. при каждом фиксированном значении t , будем аппроксимировать в произвольной точке

$(x_i, t) \quad i = 0, 1, \dots, n$ следующим разностным отношением:

$$\forall (x_i, t) \Delta(t) y_i = \frac{1}{h} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right], \quad (6)$$

где $a(x_i, t)$ – коэффициенты, подбираемые из требования аппроксимации

функции $\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ с точностью $O(h^2)$, где h – шаг разности схемы.

Способы построения коэффициентов $a(x_i, t)$ будут описаны ниже.

Правую часть уравнения (1), т.е. производную по пространству, мы можем аппроксимировать со вторым порядком аппроксимации. Чтобы разностная схема в целом имела второй порядок аппроксимации по пространственной переменной, разностный коэффициент теплопроводности $a(x_i, t)$ должен удовлетворять условиям второго порядка аппроксимации, т.е. необходимо выполнение следующих равенств:

$$a(x_i, t) + a(x_{i+1}, t) = 2k(x_i, t) + O(h^2), \quad (7)$$

$$\frac{a(x_{i+1}, t) - a(x_i, t)}{h} = k'(x_i, t) + O(h^2). \quad (8)$$

В теории разностных схем доказывається, что такой аппроксимацией для коэффициента теплопроводности будут служить выражения

$$a(x_i, t) = \frac{k(x_i, t) + k(x_{i-1}, t)}{2}; \quad (9)$$

$$a(x_i, t) = k(x_i - \frac{h}{2}, t); \quad (10)$$

$$a(x_i, t) = \frac{2k(x_i, t)k(x_{i-1}, t)}{k(x_{i-1}, t) + k(x_i, t)}. \quad (11)$$

От способа вычисления аппроксимирующего выражения для k , то есть $a(x_i, t)$ будет очень сильно зависеть точность расчета результирующего значения искомой функции. Иногда имеет смысл проведения численных расчётов (вычислительного эксперимента) с различными аппроксимациями для коэффициента $a(x_i, t)$, то есть использования формул (9)–(11). Сравниваются погрешности полученных таким образом решений, и выбирается наилучшее выражение $a(x_i, t)$ для данной задачи.

Рассмотрим явную схему для поставленной нами задачи, в основе которой лежит одномерное нестационарное уравнение теплопроводности, в котором коэффициент теплопроводности является функцией координат x и t . Чтобы построить разностную схему для такой задачи, необходимо ввести пространственно-временную сетку, в узлах которой определить сеточную функцию и далее, в зависимости от выбранного шаблона, можно строить разностные схемы. Наиболее общей будет являться разностная схема с весами:

$$\rho(x_i, t) \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(t) (\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma) y_i^j) + \varphi_i^j \quad (12)$$

$$i = 0, 1, \dots, n; j = 1, \dots, K - 1.$$

$$y_0^j = u_1(t_j) \quad y_n^j = u_2(t_j) \quad j = 0, 1, \dots, K. \quad (13)$$

В этой схеме принимаем

$$\forall(x_i, t) \quad \Lambda(t)y_i = \frac{1}{h} \left[a(x_{i+1}, t) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a(x_i, t) \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right]$$

и в качестве параметра по времени можно взять любое значение $\forall t \in [t_j, t_{j+1}]$. Например, если взять $t = t_j + \frac{\tau}{2}$ и вес $\sigma = \frac{1}{2}$, то можем получить разностную схему, имеющую второй порядок аппроксимации и по времени, и по пространству, но при этом необходимо потребовать такой же порядок аппроксимации для коэффициентов схемы. Исследование значений параметров схемы следует проводить по принципу замороженных коэффициентов.

Рассмотрим алгоритм принципа замороженных коэффициентов при построении явной схемы. Явную схему можно получить из системы (12), если принять значение веса $\sigma = 0$. Для простоты будем полагать также $f(x_i, t) = 0$, т.е. имеем

$$\rho(x_i, t) \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(t)y_i^j. \quad (14)$$

При таких предположениях согласно принципу замороженных коэффициентов, мы должны считать, что $a(x_i, t) \equiv a = const$, $p(x_i, t) \equiv p = const$. Тогда уравнение (14) можно записать в следующем виде:

$$\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = a \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}. \quad (15)$$

Введём обозначение $\tau' = \frac{\tau \cdot a}{\rho}$. В этом случае уравнение (15) принимает вид, который совпадает с явной схемой одномерного нестационарного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau'} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}. \quad (16)$$

Известно, что такое уравнение будет устойчиво, если выполняются условия $\tau' \leq \frac{h^2}{2}$, т.е.

$$\frac{\tau \cdot a}{\rho} \leq \frac{h^2}{2}. \quad (17)$$

Таким образом, согласно принципу замороженных коэффициентов, можно утверждать: если условие (17) выполняется, то построенная схема (14) будет устойчивой при всех допустимых значениях коэффициента теплопроводности $a(x_i, t)$ и плотности $\rho(x_i, t)$. Это означает, что для всех x и t должны выполняться неравенства

$$\frac{\tau \cdot a(x_i, t)}{\rho(x_i, t)} \leq \frac{h^2}{2} \quad i = 0, 1, \dots, N; \text{ или } \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{\rho}{2 \cdot a}. \quad (18)$$

Из исходной постановки задачи следуют условия, которые накладываются на эти коэффициенты, т.е. должны выполняться неравенства $0 < c_1 \leq a(x, t) \leq c_2$, $\rho(x, t) \geq c_3 > 0$. Следовательно, неравенства (18) будут верными, если вместо ρ подставим минимальное значение, а вместо a подставим максимальное

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{c_3}{2 \cdot c_2}. \quad (19)$$

В случае, когда выполняется (19), построенная схема будет устойчивой, решение исходной задачи теплопроводности с переменными коэффициентами сводится к системе уравнений вида (в предположении, что функция источника не равна нулю)

$$y_i^{j+1} = y_i^j + \tau(\Lambda y_i^j + \varphi_i^j) = \left(1 - \frac{\tau}{h^2}(a_i + a_{i+1})\right) \cdot y_i^j + \frac{\tau}{h^2}(a_i y_{i-1}^j + a_{i+1} y_{i+1}^j) + \tau \varphi_i^j \quad (20)$$

$$i = 0, 1, \dots, N; j = 1, \dots, K - 1$$

Явная схема является условно устойчивой, её использование не всегда целесообразно. Для исключения условной устойчивости принято использовать неявные схемы, которые обладают абсолютной устойчивостью. Если в схеме с весами (19) положить параметр $c_1=0$, то получим разностную схему, которая является неявной. Для определения значения искомой функции на каждом временном слое имеем следующую систему уравнений:

$$\sigma \Lambda y_i^{j+1} - y_i^{j+1} = -y_i^j + \tau(-\sigma) \Lambda y_i^j + \tau \varphi_i^j. \quad (21)$$

Эту систему (21) можно записать следующим образом:

$$y_i y_{i-1}^{j+1} - (y_i + y_{i+1} + 1) y_i^{j+1} + y_{i+1} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j. \quad (22)$$

$$\text{Здесь } \gamma_i = \sigma \cdot a_i \frac{\tau}{h^2},$$

$$F_i^j = \left(1 - \frac{\tau}{h^2}(1-\sigma)(a_i + a_{i+1})\right) y_i^j + \frac{\tau}{h^2}(1-\sigma)(a_i y_{i-1}^j + a_{i+1} y_{i+1}^j) + \tau \cdot \varphi_i^j.$$

Полученную краевую задачу (22) можно решать методом прогонки, т.к. условия устойчивости прогонки при $\sigma > 0$ будут выполнены, т.е.

$$|y_i + y_{i+1}| \geq |y_i| + |y_{i+1}| \quad \text{или} \quad |y_i| \neq 0.$$

Наиболее употребительными являются безусловно устойчивые неявные схемы, которые получаются при $c_3=0,5$. Среди них различают следующие схемы:

симметричная, которая получается при $c=0,5$

$$y_i^j = \frac{1}{2} \Lambda (y_{i-1}^{j+1} + y_{i+1}^j) + \varphi_i^j$$

схема с опережением (чисто неявная схема) получается при $c=1$

$$y_i^j = \frac{1}{2} \Lambda y_{i-1}^{j+1} + \varphi_i^j.$$

Библиографический список

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – Изд. 4-е. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
3. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФОКСА НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Ю.Ю. Вязовская, И.М. Мойко

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

1. Постановка задачи

Объектом исследования в данной статье является следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x),$$

а именно его частный случай

$$\varphi(x) - \int_0^{\infty} K(xs)\varphi(s)ds = f(x), \quad (1)$$

которое известно в литературе как интегральное уравнение Фокса [1] и которое можно получить из интегрального уравнения Фредгольма второго рода с разностным ядром путем замены переменных. Необходимо построить решение интегрального уравнения (1).

2. Применение интегральных преобразований

Преобразование Меллина для функции $f(x)$ имеет вид

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx \quad (2)$$

Обратное преобразование Меллина имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)x^{s-1}ds, t > 0, \sigma \in (\sigma_1; \sigma_2). \quad (3)$$

Преобразование Меллина тесно связано с преобразованиями Фурье и Лапласа, и, следовательно, многие теоремы для преобразования Меллина можно получить из соответствующих теорем для преобразований Фурье и Лапласа путем замены переменных [1, 2, 4].

Преобразование Меллина удобно применять при решении интегральных уравнений Фокса.

Пусть функции $\varphi(x)$, $f(x)$ и $K(x)$ допускают преобразование Меллина. Применяя к обеим частям уравнения (1) это преобразование, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varphi(x)x^{s-1}dx &= \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx + \int_0^{\infty} \varphi(t)dt \int_0^{\infty} K(xt)x^{s-1}dx \\ \Phi(s) &= F(s) + \int_0^{\infty} \varphi(t)dt \int_0^{\infty} K(xt)x^{s-1}dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Выполним замену переменных в интегралах в правой части (4), преобразуем уравнение к виду

$$\Phi(s) = F(s) + \tilde{K}(s)\Phi(1-s).$$

Выполнив замену в последнем уравнении $s=1-s$ и подставив туда значение для $\Phi(1-s)$, при условии, что $1 - \tilde{K}(1-s)\tilde{K}(s) \neq 0$, получим

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + \tilde{K}(s)F(1-s)}{1 - \tilde{K}(1-s)\tilde{K}(s)}. \quad (5)$$

Применяя обратное преобразование Меллина к (5), получим решение исходного интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(s) + \tilde{K}(s)F(1-s)}{1 - \tilde{K}(1-s)\tilde{K}(s)} x^{-s} ds.$$

К недостаткам данного подхода можно отнести следующее: нахождение прямого и обратного преобразований Меллина аналитически возможно лишь для весьма ограниченного набора функций, приближенное же их вычисление с заданной точностью представляет отдельную нетривиальную задачу.

3. Прямой квадратурный метод

При невозможности применения преобразования Меллина можно использовать метод механических квадратур. Сведение задачи решения интегральных уравнений к решению систем линейных алгебраических уравнений, получаемых заменой интегралов конечными суммами, является одним из самых эффективных методов [3]. Метод квадратур относится к аппроксимационным методам. Он широко распространен на практике, так как достаточно универсален в отношении принципа построения алгоритмов решения как линейных, так и нелинейных уравнений.

В рассмотренном выше интегральном уравнении Фокса (1) заменим интеграл в левой части квадратурной формулой. Получим:

$$\varphi(x) - \sum_{k=1}^n K(x s_k) \varphi(s_k) = f(x).$$

Приравнивая левые и правые части предыдущих уравнений в узлах $x_i, i=1,2,\dots, n$ имеем

$$\varphi(x_i) - \sum_{k=1}^n K(x_i s_k) \varphi(s_k) = f(x_i), \quad i=1,2,\dots,n.$$

Здесь $\{x_i\}_i$ – сетка узлов, покрывающих отрезок $[0,b]$, где b – достаточно большое число. Решение последней системы даст значения $\varphi_i = \varphi(x_i) \quad i = \overline{1,n}$, по которым путем интерполяции находится приближенное решение интегрального уравнения на всем интервале. В качестве решения можно принять функцию, полученную линейной интерполяцией, то есть совпадающую с φ_i в точках x_i и линейную в каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$.

4. Численная иллюстрация

Проиллюстрируем работу алгоритма прямого метода квадратур на примере следующего модельного уравнения

$$\varphi(x) - \int_0^x x s \varphi(s) ds = e^{-x} - x, \quad (6)$$

точным решением которого является функция $\varphi^{-1}(x) = e^{-x}$.

Результаты решения модельной задачи (6) приведены в таблице, в которой приняты следующие обозначения: N – число отрезков разбиения,

$$\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq N} |\varphi_i - \varphi^*(x_i)|.$$

n	50	100	150	200	220	240	250
ε	8.160e-004	4.503e-004	3.107e-004	2.371e-004	2.166e-004	1.993e-004	1.924e-004

Для вычисления интеграла в левой части уравнения (6) применяется квадратурная формула – формула средних прямоугольников на неравномерной сетке, разрежающейся к правой границе интегрирования, в соответствии с характером убывания подынтегральной функции. При этом в качестве верхней границы интегрирования при практических вычислениях бралось значение $b=30$.

Библиографический список

1. Титчмарш Э. Введение в теорию интегралов Фурье – М.: Гостехиздат, 1948.
2. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Методы решения интегральных уравнений: справочник. – М.: Факториал, 1999.
3. Арушанян И.О. Численное решение интегральных уравнений методом квадратур.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1976.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ

А.Н. Тында, В.А. Алякина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

1. Постановка задачи.

Работа посвящена численному восстановлению сигнала, подаваемого на вход линейной динамической системы с конечной памятью. Такая система описывается следующим интегральным уравнением I рода типа Вольтерра

$$\int_{t-T}^t H(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [a,b], \quad (1)$$

в котором величина T называется временем последствия или памятью динамической системы. В теории автоматического управления и радиотехнике ядро $H(t,s)$ интегрального уравнения (1) называется импульсной переходной функцией. В данном случае оно не является разностным, что соответствует нестационарной динамической системе [1]. Такого рода модели также применяются при описании возрастной структуры экологических популяций [4].

Уравнение (1) можно также рассматривать как уравнение с константной задержкой. Уравнения с различного рода задержками находят применение на практике при описании широкого класса экономических, демографических и биологических процессов. В настоящее время имеется лишь ряд численных методов для уравнений с константными задержками в пределах интегрирования (см., например, работы [2, 3] и ссылки в них). Однако в них рассматриваются уравнения II рода, а значит, не встает вопрос о корректности задачи. Интегральным уравнениям с неизвестными нелинейными задержками посвящены работы [5, 6].

Задача решения уравнения (1) может быть корректной или некорректной в зависимости от метода решения и гладкости входящих в уравнение функций. Это связано с тем, что оператор, порожденный левой частью уравнения, отображает рассматриваемое пространство решений не на все это пространство, а на его узкую часть. Поэтому обратный оператор не ограничен. Следовательно, необходимо оценивать близость решений и близость правых частей в разных метриках (близость правых частей должна быть в более сильной метрике). Подробный обзор вопроса корректности в различных функциональных пространствах для классических уравнений Вольтерра I рода можно найти в [1].

В данной работе предлагается специальный устойчивый квадратурный метод первого порядка точности, основанный на применении формулы средних прямоугольников и обладающий регуляризирующими свойствами.

2. Регуляризирующий численный метод.

Прежде всего определим для уравнения (1) пространства функций. Пусть $H(t,s) \in C^1[a,b] \times [a-T,b]$, $f(t) \in C^1[a,b]$. В этом случае при точно заданных функциях H и f уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение $x(t)$. Пусть также при $t \in [a-T, a]$ $x(t) \equiv \varphi(t)$, т.е. $\varphi(t)$ – заданная предыстория динамической системы.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на N частей точками $t_k = kh$, $k = 0, \dots, N$, $h = \frac{T}{N}$. Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = x \left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right), t \in (t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

С целью упрощения изложения введем следующие обозначения $x_N(t_k) = x_k$, $f(t_k) = f_k$, $k = 1, \dots, N$.

Потребуем, чтобы функция (2) удовлетворяла уравнению (1) в точках сетки t_k :

$$\int_{t_k - T}^{t_k} H(t_k, s) x_N(s) ds = f_k, k = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Разобьем интеграл в (3) на части с длиной отрезка интегрирования, не превосходящей шага сетки h . В зависимости от величины $t_k - T$ возможны два случая.

Пусть сначала $t_k - T \leq t_0$. Тогда уравнения (3) могут быть представлены в виде

$$\int_{t_k - T}^{t_0} H(t_k, s) \varphi(s) ds + \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} H(t_k, s) x_N(s) ds = f_k.$$

Выбор квадратурной формулы для вычисления первого интеграла в левой части последнего равенства зависит от гладкости предыстории φ и ядра H по переменной s . В случае достаточной гладкости применяется формула Гаусса. К остальным интегралам применяется формула средних прямоугольников. Таким образом, значения приближенного решения на сетке могут быть последовательно определены по формулам

$$x_k = \frac{f_k - I_k(T) - h \sum_{i=1}^{k-1} H(t_k, \frac{t_{i-1} + t_i}{2}) x_i}{h H(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2})}, I_k(T) = \int_{t_k - T}^{t_0} H(t_k, s) \varphi(s) ds, k = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Пусть теперь $t_k - T > t_0$. В этом случае равенства (3) в результате применения составной формулы средних прямоугольников примет вид

$$x_k = \frac{f_k - (t_{v_k} - t_k + T)H(t_k, \frac{t_k - T + t_{v_k}}{2})x_{v_k} - h \sum_{i=v_k+1}^{k-1} H(t_k, \frac{t_{i-1} + t_i}{2})x_i}{hH(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2})}, k = \overline{1, N}, \quad (5)$$

где через v_k обозначен номер отрезка сетки, на который попадает значение $t_k - T$.

Таким образом, значения неизвестной функции на рассматриваемой сетке (а значит и приближенное решение $x_N(t), t \in [a, b]$) могут быть последовательно найдены по формулам (4) – (5). Скорость сходимости предложенного метода оценивается следующим неравенством

$$\|x(t) - x_N(t)\|_{C[a,b]} \leq \frac{A}{N}, \quad (6)$$

где A – положительная константа, независящая от N .

3 Численный пример.

Проиллюстрируем работу предложенного алгоритма на примере следующего модельного уравнения

$$\int_{t-T}^t \frac{tx(s)}{s^2 + 1} ds = t \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(t-T)^2 + 1}{t^2 + 1} + T + (t-T) - (t) \right], \quad (7)$$

точным решением которого является функция $x^*(t) = t^2 - t, t \in [0, 1], T = 0,5$.

Результаты решения модельной задачи (7) приведены в таблице, в которой приняты следующие обозначения: N – число отрезков разбиения, $\varepsilon = \|x_N(t) - x^*(t)\|_{C[0,1]}$.

Зависимость погрешности ε вычислений от N

N	10	20	50	100	1000	10000	100000	500000
ε	0.047	0.024	0.0098	0.00498	4.99e-4	4.99e-5	5.0e-6	1.03e-6

Как видно из представленных результатов, практическая скорость сходимости метода подтверждает теоретическую оценку (6).

Библиографический список

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова Думка, 1986.
2. Cardone A., Prete I.D., Nitsch C., Gaussian direct quadrature methods for double delay Volterra integral equations. Electronic Transactions on Numerical Analysis. Kent State University. Volume 35, 2009. – P. 201 – 216.

3. Messina E., Russo E., Vecchio A. A convolution test equation for double delay integral equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. Volume 228, Issue 2, 2009. – P. 589 – 599.

4. Popovic Z. Basic mathematical models in economic-ecological control. Facta Universitatis. Economics and Organization. Volume 5. – N. 3. – 2008. – P. 251 – 262.

5. Тында А.Н. Решение систем нелинейных интегральных уравнений с неизвестными задержками // Труды СВМО. – 2007. – Т. 9.– №.1. – С. 253 – 259.

6. Tynda A.N. Iterative numerical method for integral models of a nonlinear dynamical system with unknown delay. PAMM, Volume 9 Issue 1, 2009. – P. 591 – 592.

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫМ ОБОРУДОВАНИЕМ В РАЗВИВАЮЩИХСЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А.Н. Тында, К.В. Баранова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

1. Постановка задачи

В данной работе предлагаются численные подходы к решению систем нелинейных интегральных уравнений специального вида, описывающих процесс замены устаревшего и изношенного оборудования в развивающихся экономических системах. Соответствующие модели имеют следующий вид [2]:

$$\begin{cases} m(t) = \int_{a(t)}^t H(t, \tau) m(\tau) d\tau, \\ \eta(t) = \int_{a(t)}^t K(t, \tau) m(\tau) d\tau, \\ c(t) = \int_{a(t)}^t L(t, \tau) m(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m(t) = \int_{a(t)}^t H(t, \tau) y(\tau) d\tau, \\ \eta(t) = \int_{a(t)}^t K(t, \tau) z(\tau) d\tau, \\ c(t) = \int_{a(t)}^t Q(\tau) d\tau - \int_{a(t)}^t H_1(\tau) y(\tau) d\tau - \int_{a(t)}^t K_1(\tau) z(\tau) d\tau \\ a'(t) \geq 0, \quad a(t) < t, \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

с начальными условиями

$$m(\xi) = m_0(\xi), \quad \eta(\xi) = \eta_0(\xi), \quad \xi \in [\tau_0, t_0], \quad a(t_0) = a_0, \quad 0 \leq \tau_0 \leq a_0 < t_0, \quad (4)$$

где $\eta(t)$ – прирост производительности в единицу времени новых рабочих мест, создаваемых в момент t ; $m(t)$ – количество новых рабочих мест, создаваемых в единицу времени в момент t ; $a(t)$ – временные границы ликвидации (сворачивания) устаревших рабочих мест; $c(t)$ – объем выпуска предметов потребления в единицу времени в момент t ; $y(t)$ и $z(t)$ – относительные доли создаваемых в момент t рабочих мест (в группах А – производство средств производства, и Н – производство научно-технического прогресса).

Возможны различные постановки задач для таких моделей. Наиболее интересными из них представляются следующие: решение системы (1) с неизвестными $m(t), a(t), c(t)$; решение (2) относительно неизвестных $y(t), a(t), z(t)$.

2. Приближенное решение

Для построения приближенного решения системы, следуя работе [1], разобьем весь интервал планирования $[t_0, T]$ на N частей точками

$$t_k = t_0 + (T - t_0) \frac{k}{N}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Задача 1. Решение системы (1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции $m_N(t)$ и кусочно-линейной $a_N(t)$.

Пусть v_k – номер сегмента, на который попадает значение $a_k = a(t_k)$, т.е. $a_k \in [t_{v_k-1}, t_{v_k}]$. Потребуем, чтобы в точках $t=t_k$ уравнения системы обращались в равенства. Отметим, что $m(t)$ и $a(t)$ при $0 < t \leq t_0$ считаются известными.

Обозначив $m_k = m(t_k)$, $a_k = a(t_k)$, представим далее исходную систему в виде:

$$\begin{cases} m(t_k) = \int_{a(t_k)}^{t_k} H(t_k, \tau) m(\tau) d\tau + \sum_{j=v_k}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} H(t_k, \tau) m(\tau) d\tau, \\ \eta(t_k) = \int_{a(t_k)}^{t_k} K(t_k, \tau) m(\tau) d\tau + \sum_{j=v_k}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t_k, \tau) m(\tau) d\tau, k = \overline{1, N}, \\ c(t_k) = \int_{a(t_k)}^{t_k} L(t_k, \tau) m(\tau) d\tau + \sum_{j=v_k}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} L(t_k, \tau) m(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (5)$$

Случай 1. $v_k = k$

Используя на малых участках для интегралов квадратурную формулу прямоугольников, имеем:

$$\begin{cases} m_k = (t_k - a_k) H(t_k, t_k) m_k, \\ \eta_k = (t_k - a_k) K(t_k, t_k) m_k. \end{cases} \rightarrow m_k = \frac{\eta_k H(t_k, t_k)}{K(t_k, t_k)}, \quad (6)$$

$$a_k = t_k - \frac{l}{H(t_k, t_k)}, k = \overline{1, N}.$$

Причем $K(t, t), H(t, t) \neq 0$ при $t \in [t_0, T]$ в силу определения этих функций.

Случай 2. $v_k < k$

Применим к интегралам в системе (4) формулу средних прямоугольников:

$$\begin{cases} m_k = (t_{v_k} - a_k) H(t_k, t_{v_k}) m_{v_k} + (t_k - t_{k-1}) H(t_k, t_{k-0.5}) m_k + S_H(v_k), \\ \eta_k = (t_{v_k} - a_k) K(t_k, t_{v_k}) m_{v_k} + (t_k - t_{k-1}) K(t_k, t_{k-0.5}) m_k + S_K(v_k). \end{cases}$$

$$\text{где } S_H(v_k) = \frac{T - t_0}{N} \sum_{j=v_k}^{k-2} H(t_k, t_{j+0.5}) m_{j-1}, \quad S_K(v_k) = \frac{T - t_0}{N} \sum_{j=v_k}^{k-2} K(t_k, t_{j+0.5}) m_{j-1},$$

$$t_{k-0.5} = \frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \quad t_{k+0.5} = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} m_k - \eta_k &= (t_{v_k} - a_k) m_{v_k} [H(t_k, t_{v_k}) - K(t_k, t_{v_k})] + \\ &+ S_H(v_k) - S_K(v_k) + (t_k - t_{k-1}) m_k [H(t_k, t_{k-0.5}) - K(t_k, t_{k-0.5})] \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
m_k = \frac{\eta_k + (t_{v_k} - a_k) m_{v_k} [H(t_k, t_{v_k}) - K(t_k, t_{v_k})] + S_H(v_k) - S_K(v_k)}{1 + (t_k - t_{k-1}) [K(t_k, t_{k-0.5}) - H(t_k, t_{k-0.5})]}, \\
(t_{v_k} - a_k) m_{v_k} = \frac{\eta_k - (t_k - t_{k-1}) K(t_k, t_{k-0.5}) x_k - S_k(v_k)}{K(t_k, t_{v_k})}.
\end{cases}$$

$$m_k = \frac{\eta_k + \frac{(\eta_k - (t_k - t_{k-1}) K(t_k, t_{k-0.5}) m_k S_K(v_k)) [H(t_k, t_{v_k}) - K(t_k, t_{v_k})]}{K(t_k, t_{v_k})} + S_H(v_k) - S_K(v_k)}{1 + (t_k - t_{k-1}) [K(t_k, t_{k-0.5}) - H(t_k, t_{k-0.5})]}. \quad (7)$$

Обозначив

$$A = \frac{H(t_k, t_{v_k}) - K(t_k, t_{v_k})}{K(t_k, t_{v_k})}, \quad B = 1 + (t_k - t_{k-1}) [K(t_k, t_{k-0.5}) - H(t_k, t_{k-0.5})],$$

получим:

$$\begin{cases}
m_k = \frac{S_H(v_k) + (1 + A) - (\eta_k - S_K(v_k))}{B + A(t_k - t_{k-1}) [K(t_k, t_{k-0.5})]}, \\
a_k = t_{v_k} + \frac{S_k(v_k) - \eta_k + (t_k - t_{k-1}) K(t_k, t_{k-0.5}) m_k}{m_{v_k} K(t_k, t_{v_k})}.
\end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, при знании номеров v_k , $k = \overline{1, N}$, приближенные значения m_k, a_k искоемых функций в точках определяются по формулам (6) и (8).

Приближенные значения c_k найдем следующим образом:

$$\begin{aligned}
c_k &= \int_{a_k}^{t_k} L(\tau, t_k) m(\tau) d\tau + \sum_{j=v_{k+1}}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} L(t_k, \tau) (\tau) d\tau = L(t_k, \frac{a_k + t_{v_k}}{2}) m_{v_k} (t_{v_k} - a_k) + \\
&+ \sum_{j=v_k+1}^k L(t_k, \frac{t_{j-1} + t_j}{2}) m_j (t_j - t_{j-1}), \quad k = \overline{1, N}.
\end{aligned} \quad (9)$$

Идея определения номеров v_k состоит в последовательном для каждого номера узла $k = \overline{1, N}$, переборе возможных значений v_k : $v_k = 1, v_k = 2, \dots, v_k = k$ и нахождении соответствующих значений m_k, a_k по формулам (6), (8). Перебор прекращается в случае выполнения условия $a_k \in [t_{v_k-1}, t_{v_k}]$, подтверждающего предположение о принадлежности a_k указанному интервалу.

Задача 2. Решение системы (2) будем искать в виде кусочно-постоянных функций $y_N(t), z_N(t), a_N(t)$.

Представим (2) в виде:

$$\begin{cases} m(t_k) = \int_{a(t_k)}^{t_k} H(t_k, \tau) y(\tau) d\tau + \sum_{j=v_k}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} H(t_k, \tau) y(\tau) d\tau, \\ \eta(t_k) = \int_{a(t_k)}^{t_k} K(t_k, \tau) z(\tau) d\tau + \sum_{j=v_k}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} K(t_k, \tau) z(\tau) d\tau, \\ c(t_k) = \int_{a(t_k)}^{t_k} Q(\tau) d\tau + \sum_{j=v_k}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} Q(\tau) d\tau - \int_{a(t_k)}^{t_k} H_1(\tau) y(\tau) d\tau + \sum_{j=v_k}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} H_1(\tau) y(\tau) d\tau - \\ - \int_{a(t_k)}^{t_k} K_1(\tau) z(\tau) d\tau + \sum_{j=v_k}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} K_1(\tau) z(\tau) d\tau, \quad k = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (10)$$

Случай 1. $v_k = k$

Используя на малых участках для интегралов квадратурную формулу прямоугольников, имеем:

$$\begin{cases} m_k = (t_k - a_k) H(t_k, t_k) y_k, \\ \eta_k = (t_k - a_k) K(t_k, t_k) z_k, \\ c_k = (t_k - a_k) Q(t_k, t_k) - (t_k - a_k) H_1(t_k, t_k) y_k - (t_k - a_k) K_1(t_k, t_k) z_k \end{cases} \quad (11)$$

$$z_k = \frac{H(t_k, t_k) Q(t_k, t_k)}{c_k H(t_k, t_k) K(t_k, t_k) + H(t_k, t_k) K_1(t_k, t_k) - H_1(t_k, t_k) K(t_k, t_k) m_k}$$

$$y_k = \frac{m_k K(t_k, t_k) z_k}{\eta_k H(t_k, t_k)}, \quad a_k = t_k - \frac{m_k}{H(t_k, t_k) y_k}$$

Случай 2. $v_k < k$

Применим к интегралам в системе (10) формулу средних прямоугольников:

$$\begin{cases} m_k = (t_{v_k} - a_k) H(t_k, t_{v_k}) y_{v_k} + S_H(v_k), \\ \eta_k = (t_{v_k} - a_k) K(t_k, t_{v_k}) z_{v_k} + S_K(v_k), \\ c_k = (t_{v_k} - a_k) Q(t_{v_k}, t_{v_k}) + S_Q(v_k) - (t_{v_k} - a_k) H_1(t_{v_k}, t_{v_k}) y_{v_k} - S_{H_1}(v_k) - \\ - (t_{v_k} - a_k) K_1(t_{v_k}, t_{v_k}) z_{v_k} - S_{K_1}(v_k). \end{cases} \quad (12)$$

$$S_H(v_k) = \frac{T - t_0}{N} \sum_{j=v_k}^{k-2} H(t_k, t_{j+0.5}) y_{j-1},$$

$$S_K(v_k) = \frac{T - t_0}{N} \sum_{j=v_k}^{k-2} K(t_k, t_{j+0.5}) z_{j-1},$$

$$S_{H_1}(v_k) = \frac{T-t_0}{N} \sum_{j=v_k}^{k-2} H_1(t_k, t_{j+0.5}) y_{j-1},$$

$$S_{K_1}(v_k) = \frac{T-t_0}{N} \sum_{j=v_k}^{k-2} K_1(t_k, t_{j+0.5}) z_{j-1}, \quad S_Q(v_k) = \frac{T-t_0}{N} \sum_{j=v_k}^{k-2} Q(t_j, t_{j+0.5}),$$

$$t_{k-0.5} = \frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \quad t_{k+0.5} = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}.$$

Из системы (12) найдем:

$$y_{v_k} = \frac{m_k - S_H(v_k)}{(t_{v_k} - a_k)H(t_k, t_{v_k})}, \quad z_{v_k} = \frac{\eta_k - S_K(v_k)}{(t_{v_k} - a_k)K(t_k, t_{v_k})},$$

$$a_k = t_{v_k} - \frac{c_k - S_Q(v_k) + \frac{H_1(t_{v_k}, t_{v_k})(m_k - S_H(v_k))}{H(t_k, t_{v_k})} + S_{H_1}(v_k) + \frac{K_1(t_{v_k}, t_{v_k})(\eta_k - S_K(v_k))}{K(t_k, t_{v_k})} + S_{K_1}(v_k)}{Q(t_{v_k}, t_{v_k})}. \quad (13)$$

Таким образом, при знании номеров v_k , $k = \overline{1, N}$, приближённые значения y_k, z_k, a_k искомых функций в точках сетки могут быть найдены по формулам (11) и (13).

Библиографический список

1. Тында А.Н. Об одном прямом методе решения системы нелинейных интегральных уравнений двухсекторной модели экономики // Труды СВМО. – Т. 8(2006). – №1. – С. 314 – 319.
2. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука, 1983.

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТЕОРИИ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

А.Н. Тында, О.А. Гурова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

1. Введение

Статья посвящена численному исследованию реологической модели теории наследственной ползучести. Основной закон деформирования в интегральной форме записывается следующим образом [1]

$$\sigma(t) + \int_{-\infty}^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau = E\varepsilon(t). \quad (1)$$

Здесь $\sigma(t)$ – полное напряжение; $\varepsilon(t)$ – деформация; E – мгновенный модуль упругости; $K(t, \tau)$ – функция, называемая ядром ползучести. Первое слагаемое в левой части описывает изменение напряжения во времени за счет упругой деформации, второе – за счет деформации ползучести, а правая часть характеризует нестационарный источник возникновения и развития напряжения в вязкоупругой среде. В (1) учитывается, что с течением времени свойства упругоползучих материалов способны меняться, а также влияние наследственности, т.к. в начальный момент времени вязкоупругая среда может находиться в напряженно-деформированном состоянии в результате осадки или уплотнения. За наследственность деформаций тела отвечает часть интеграла по интервалу $(-\infty, 0]$.

В качестве ядра ползучести, хорошо описывающего реологические свойства многих сред, будем рассматривать ядро А.Р. Ржаницына [2]

$$K(t, \tau) = \frac{Ae^{-\beta(t-\tau)}}{\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, A > 0, \beta > 0. \quad (2)$$

Ниже предлагается итерационный метод приближенного решения уравнения (1) с ядром (2), основанный на кусочно-полиномиальной аппроксимации точного решения.

2. Описание численного метода

Рассмотрим уравнение (1) на отрезке $[0, T]$. Положим также, что $\sigma(t) \equiv \tilde{\sigma}(t)$ при $t \in (-\infty, 0)$ — заданная предыстория системы.

Метод последовательных приближений в этом случае записывается в виде

$$\sigma_{m+1}(t) = E\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^0 K(t, \tau) \tilde{\sigma}(\tau) d\tau - \int_0^t K(t, \tau) \sigma_m(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Разобьем отрезок $[0, T]$ на N частей точками $t_k = T \left(\frac{k}{N} \right)^{\frac{r}{1-\alpha}}$, $k = \overline{0, N}$, где параметр r связан с гладкостью функций $\varepsilon(t)$ и $\tilde{\sigma}(t)$.

На каждом отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, N}$, введем дополнительные узлы по формуле

$$t_k^j = \frac{t_{k-1} + t_k}{2} + \frac{t_k - t_{k-1}}{2} \xi_j, \quad j = \overline{1, r}, \quad (4)$$

где ξ_j – нули многочленов Чебышева I рода степени r .

Приближенное решение $\sigma_N(t)$ уравнения (1) представляет собой сплайн, составленный из интерполяционных полиномов Лагранжа степени $r-1$, построенных на каждом отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ по узлам (4). Потребуем на каждой итерации m выполнения равенств (3) в точках сетки t_k^j :

$$\sigma_{m+1}(t_k^j) = E\varepsilon(t_k^j) - \int_{-\infty}^0 K(t_k^j, \tau) \tilde{\sigma}(\tau) d\tau - \int_0^{t_k^j} K(t_k^j, \tau) \sigma_m(\tau) d\tau, \quad (5)$$

$$m = 0, 1, \dots, k = \overline{1, N}, j = \overline{1, r}.$$

В случае использования в качестве $K(t, \tau)$ ядра Ржаницына второй интеграл в (5) содержит слабую особенность на правой границе интегрирования. Для его вычисления применяется составная квадратурная формула Гаусса по существенно неравномерной сетке, сгущающейся к правой границе интегрирования (подробно такой подход изложен в [4]). При этом в качестве значений $\sigma_m(t)$ в узлах квадратурной формулы берутся значения сплайна $\sigma_N(t)$, построенного на текущей итерации m .

Первый интеграл в (5) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 K(t_k^j, \tau) \tilde{\sigma}(\tau) d\tau &= \frac{Ae^{-\beta t_k^j}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\beta\tau} \tilde{\sigma}(\tau)}{(t_k^j - \tau)^\alpha} d\tau = \left[\tau \rightarrow -\frac{s}{\beta} \right] = \\ &= \frac{Ae^{-\beta t_k^j}}{\beta\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} \frac{\tilde{\sigma}\left(-\frac{s}{\beta}\right)}{\left(t_k^j + \frac{s}{\beta}\right)^\alpha} ds. \end{aligned}$$

Для вычисления такого интеграла применим квадратурную формулу Гаусса-Лагерра вида $\int_0^\infty e^{-t} g(t) dt = \sum_{i=1}^n \omega_i g(t_i) + R_n$, где $t_i, i = \overline{1, n}$, – нули многочленов Лагерра $L_n^{(0)}(t)$ степени n , ортогональных на полуоси

$[0, \infty)$ с весом e^{-t} ; ω_i – веса квадратурной формулы, вычисляемые по

$$\text{формулам } \omega_i = \frac{t_i}{(n+1)^2 [L_{n+1}^{(0)}(t_i)]^2}, i = \overline{1, n}.$$

Для остатка R_n квадратурной формулы справедлива следующая оценка [3]:

$$R_n = \frac{(n!)^2 g^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, 0 < \xi < \infty.$$

Таким образом, с помощью итерационного процесса (5) определяем значения неизвестной функции на сетке узлов $\{t_k^j\}$ и затем восстанавливаем ее в форме сплайна $\sigma_N(t)$.

3. Иллюстрация сходимости

Проиллюстрируем работу предложенного алгоритма на примере следующего модельного уравнения

$$\sigma(t) + \int_{-\infty}^t e^{-2(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau = 2t - \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \quad (6)$$

точным решением которого является функция $\sigma^*(t) = t - t^2, t \in [0, 1]$.

При расчетах использовалась формула Гаусса-Лагерра по 30 узлам. Результаты решения модельной задачи (6) приведены в таблице, в которой приняты следующие обозначения: N – число отрезков разбиения, m – число итераций, r – порядок сплайна, $\varepsilon = \|\sigma_N(t) - \sigma^*(t)\|_{C[0,1]}$.

Зависимость погрешности ε вычислений от параметров метода

N	10	10	10	50	50	10	10	10	20
m	2	5	10	15	15	2	5	10	20
r	1	1	1	1	2	3	3	3	3
ε	0.029	0.002	1.4e-4	7.1e-6	5.2e-14	0.028	0.00053	1.8e-8	2.8e-14

Библиографический список

1. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения. – СПб.: Профессия, 2007. – 560 с.
2. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968. – 418 с.
3. Справочник по специальным функциям / под. ред. М. Абрамовица, И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
4. Тында А.Н. Смешанный сплайн-коллокационный метод решения слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра // Труды СВМО. – 2005. – Т. 7. – № 1. – С. 351– 358.

**О СТАБИЛИЗАЦИИ
ЛИНЕЙНОЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Е.А. Лизина

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,
г. Саранск, Россия

Рассмотрим систему уравнений с дискретно-непрерывным временем

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)u(ph), \quad (1)$$

где $y \in R^n$, $u \in R^r$, $r \leq n$, $A(t)$, $B(t)$ – непрерывные ω -периодические матрица и вектор размерности соответственно $n \times n$ и $n \times 1$; $u(ph)$ – кусочно-постоянное управление, зависящее от дискретных моментов времени; $y(0) = y_0$ – начальное условие, характеризующее начальное отклонение от программного режима. Измерения вектора состояния системы (1) производятся в точках $t = ph$, где h – величина интервала между измерениями, $p=0,1,2,\dots$. На основе этих измерений и формируется управление $u(ph)$.

Для решения задачи нахождения кусочно-постоянного управления, стабилизирующего систему (1), воспользуемся идеей, предложенной в работе [1]. Разобьем отрезок $[0, \omega]$ на m не обязательно равных частей точками $\{t_k\}_{k=0, \overline{m}}$ так, чтобы $t_0 = 0$, $t_m = \omega$. Обозначим через h_k^* величину k -го шага разбиения, т. е. $h_k^* = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, \overline{m-1}$. Для определенности положим, что в общем случае на промежутке $[t_k, t_{k+1})$ проводится n измерений, и соответствующие моменты квантования обозначим через p^*h , $p^* = \overline{1, n}$.

На каждом промежутке $t_k \leq t < t_{k+1}$ матрицы $A(t)$ и $B(t)$ заменим постоянными матрицами, построенными по правилам

$$\bar{A}_k = \frac{1}{h_k^*} \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(t) dt, \quad \bar{B}_k = \frac{1}{h_k^*} \int_{t_k}^{t_{k+1}} B(t) dt, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad (2)$$

а на отрезке $[0, \omega]$ определим кусочно-постоянные матрицы $A^*(t)$ и $B^*(t)$:
 $A^*(t) = \bar{A}_k$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$ ($k=0,1,\dots,m-1$), $\min_{t \in [t_k, t_{k+1})} A(t) \leq \bar{A}_k \leq \max_{t \in [t_k, t_{k+1})} A(t)$,

$$B^*(t) = \bar{B}_k \text{ при } t \in [t_k, t_{k+1}), (\kappa=0,1,\dots,m-1), \min_{t \in [t_k, t_{k+1})} B(t) \leq \bar{B}_k \leq \max_{t \in [t_k, t_{k+1})} B(t).$$

Таким образом, получаем систему с кусочно-постоянным управлением, т.е.

$$\dot{y} = A^*(t)y + B^*(t)u(ph), \quad t \in [0, \omega] \quad (3)$$

которая на промежутке $t \in [t_k, t_{k+1})$ является непрерывно-дискретной системой с постоянными коэффициентами

$$\dot{y}_{h_k^*} = \bar{A}_k y_{h_k^*} + \bar{B}_k u_k(p^*h), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad p^* = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Приведем модификацию теоремы В. И. Зубова [2, с. 100] для системы (4).

Теорема 1 [2, с. 100]. Если векторы $\bar{B}_k, \bar{A}_k \bar{B}_k, \dots, \bar{A}_k^{n-1} \bar{B}_k$, ($k = 0, 1, \dots, m-1$) линейно независимы, то существуют коэффициенты усиления \bar{C}_k и величина h такие, что в системе (4) $\operatorname{Re} \lambda_j(\bar{A}_k + \bar{B}_k \bar{C}_k^T) < 0$.

Кроме того, для любого непрерывного управления $U_k = \bar{C}_k Y_k$, которое стабилизирует нулевое решение непрерывной системы

$$\dot{y}_{h_k^*} = \bar{A}_k y_{h_k^*} + \bar{B}_k u_k(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

на промежутке $t_k \leq t < t_{k+1}$ существует число $h_0 > 0$ такое, что для всех $h < h_0$ кусочно-постоянное управление

$$u_k = \bar{C}_k^T y_k(p^*h), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad p^* = \overline{1, n} \quad (5)$$

будет также стабилизировать это движение.

В соответствии с теоремой 1 будем считать, что для каждого промежутка $[t_k, t_{k+1})$ ($k=0,1,2,\dots$) найдено кусочно-постоянное управление вида (5), стабилизирующее систему (4). В качестве управления для системы (3) выберем вектор, построенный по правилу $u = (C^*(t))^T y(p^*h)$, где $C^*(t)$ – n -мерный вектор, определяемый как

$$C^*(t) = \bar{C}_k \text{ при } t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (k = 0, 1, \dots, m-1). \quad (6)$$

Здесь \bar{C}_k – коэффициенты усиления, стабилизирующие систему (4) на промежутках $[t_k, t_{k+1})$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$). Подставив управление в систему (3), получим

$$\dot{y} = \left(A^*(t) + B^*(t) \cdot (C^*(t))^T \right) y + B^*(t) \cdot (C^*(t))^T (y(\text{ph}) - y), \quad t \in [0, \omega]. \quad (7)$$

Обозначим: $A^*(t) + B^*(t) \cdot (C^*(t))^T = M^*(t)$, $B^*(t) \cdot (C^*(t))^T = N^*(t)$,

где $M^*(t) = \overline{M}_k$ и $N^*(t) = \overline{N}_k$ при $t_k \leq t < t_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$). Тогда (7) примет вид

$$\dot{y} = M^*(t)y + N^*(t)(y(\text{ph}) - y), \quad t \in [0, \omega]. \quad (8)$$

Отметим, что для каждого промежутка времени $[t_k, t_{k+1})$ системы (8) будет справедливо неравенство [1, с. 100]:

$$\left\| y_{h_k^*} - y_{h_k^*}(p^*h) \right\| \leq c_1 h \left\| y(p^*h) \right\|, \quad t \in [p^*h, (p^*+1)h) \subset [t_k, t_{k+1}), \quad p^* = \overline{1, n},$$

где c_1 – вещественное число, не зависящее от h . Используя данную оценку в (8), получим неравенство

$$\dot{y}_{h_k^*} \leq \overline{M}_k y_{h_k^*} + \overline{N}_k c_1 h \left\| y_{h_k^*}(p^*h) \right\|, \quad t \in [p^*h, (p^*+1)h) \subset [t_k, t_{k+1}), \quad p^* = \overline{1, n},$$

система сравнения для которого имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_{h_k^*} &\leq \overline{M}_k x_{h_k^*} + \overline{N}_k c_1 h \left\| y_{h_k^*}(p^*h) \right\|, \\ x_{h_k^*}(p^*h) &= y_{h_k^*}(p^*h), \quad t \in [p^*h, (p^*+1)h), \quad p^* = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Запишем решение системы (9) при $t_k \leq p_n^*h \leq t < t_{k+1}$

$$\dot{x}_{h_k^*} = e^{(t-t_k)\overline{M}_k} D_k + c_1 h \left\| y_{h_k^*}(p^*h) \right\| D_k \int_{t_k}^t e^{(\tau-t_k)\overline{M}_k} \overline{N}_k(\tau) d\tau$$

и при $t_{k+1} \leq t \leq (p_n^*+1)h < t_{k+2}$

$$\dot{x}_{h_{k+1}^*} = e^{(t-t_{k+1})\overline{M}_{k+1}} D_{k+1} + c_1 h \left\| y_{h_{k+1}^*}(p^*h) \right\| D_{k+1} \int_{t_{k+1}}^t e^{(\tau-t_{k+1})\overline{M}_{k+1}} \overline{N}_{k+1}(\tau) d\tau,$$

($k = 0, 1, \dots, m-1$).

Здесь D_{k1} и D_{k+1} есть произвольные матрицы. Используя непрерывность $x(t)$ в точке $t = t_{k+1}$, согласно [4], будем иметь

$$D_{k+1} = D_k \left(e^{(t-t_k)\overline{M}_k} + c_1 h \left\| y_{h_k^*}(p^*h) \right\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{(\tau-t_k)\overline{M}_k} \overline{N}_k(\tau) d\tau \right), \quad (10)$$

При $k = 0$ и $t = t_0 = 0$ получаем $X(0) = E = D_0$. Из формулы (10) последовательно выводим

$$D_1 = e^{h_0^* \bar{M}_0} + c_1 h \left\| y_{h_0^*} \left(p_{n_0}^* h \right) \right\| D_k \int_0^{t_1} e^{\tau \bar{M}_0} \bar{N}_0(\tau) d\tau, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ D_{m-1} &= \left(e^{h_0^* \bar{M}_0} + c_1 h \left\| y_{h_0^*} \left(p_{n_0}^* h \right) \right\| D_k \int_0^{t_1} e^{\tau \bar{M}_0} \bar{N}_0(\tau) d\tau \right) \times \dots \times \\ & \times \left(e^{h_{m-2}^* \bar{M}_{m-2}} + c_1 h \left\| y_{h_{m-2}^*} \left(p_{n_{m-2}}^* h \right) \right\| D_k \int_t^{t_{m-1}} e^{(\tau - t_{m-2}) \bar{M}_{m-2}} \bar{N}_{m-2}(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Здесь $\{p_{n_i}^*\}_{i=\overline{0, m-2}}$ – последние моменты квантования в каждом из промежутков $t_k \leq t < t_{k+1}$. Слагаемые, содержащие интегралы, обозначим в равенствах (11) через $\Psi_k h$ ($k = \overline{0, m-2}$) где Ψ_k – вещественные числа. Тогда при $h \rightarrow 0$ будут выполняться следующие неравенства

$$D_1 \leq e^{h_0^* \bar{M}_0},$$

...

$$D_{m-1} \leq e^{h_{m-2}^* \bar{M}_{m-2}} \dots e^{h_0^* \bar{M}_0}.$$

Следовательно, фундаментальную систему решений системы (10) при достаточно малом h_{k+1}^* можно оценить как $X_{h_k^*}^*(t) \leq e^{(t-t_k) \bar{M}_k} e^{h_{k-1}^* \bar{M}_{k-1}} \dots e^{h_0^* \bar{M}_0}$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, а на последнем промежутке ($t_{m-1}, t_m = \omega$) будет выполняться неравенство $X_{h_{m-1}^*}^*(t) \leq e^{h_k^* \bar{M}_k} e^{h_{k-1}^* \bar{M}_{k-1}} \dots e^{h_0^* \bar{M}_0}$. По теореме сравнения [3, с. 191] фундаментальная система решений системы (9) может быть оценена следующим образом:

$$Y_h^*(t) \leq e^{h_k^* \bar{M}_k} e^{h_{k-1}^* \bar{M}_{k-1}} \dots e^{h_0^* \bar{M}_0}. \quad (12)$$

Далее проведем обоснование того, что кусочно-постоянное управление, построенное по правилу (5) решает задачу стабилизации для

уравнения (1). Для этого в системе (1) примем, что $u = (C(t))^T y(ph)$ где $C(t)$ – некоторая непрерывная матрица, и запишем его в виде

$$\dot{y} = (A(t) + B(t)(C(t))^T)Y + B(t)(C(t))^T (y(ph) - y), \quad t \in [0, \omega]. \quad (13)$$

Обозначим $A(t) + B(t)(C(t))^T = M(t)$, $B(t)(C(t))^T = N(t)$, Тогда (13) примет вид

$$\dot{y} = M(t)Y + N(t)(y(ph) - y), \quad t \in [0, \omega] \quad (14)$$

В качестве нормы будем использовать норму матрицы $\|\Theta\| = \max_j \sum_k |\theta_{jk}|$.

Теорема 2. Пусть: а) для системы (7) построено управление $u = (C^*(t))^T y(ph)$ с коэффициентами, вычисляемым по правилам (6); б) для системы (14) – некоторое непрерывное управление $u = (C(t))^T y(ph)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение отрезка $[0, \omega]$ на части, что если $\|C^T(t) - (C^*(t))^T\| \leq \frac{\varepsilon}{3L}$, то

$$\|y(t) - y_{h^*}^*(t)\| \leq \Omega \varepsilon \omega e^{2\omega R},$$

где $y(t)$ – решение системы (14), $y_{h^*}^*(t)$ – решение системы (7), L – число, ограничивающее норму матрицы $B(t)$, R – число, ограничивающее норму матрицы $M(t)$.

Доказательство. Так как коэффициенты управления $C^*(t)$ кусочно-постоянные на промежутках $t_k \leq t < t_{k+1}$, очевидно, что существует такое разбиение отрезка $[0, \omega]$ на части точками t_k так, что $\max_k h_k < \varepsilon$ и

при этом будет выполняться неравенство $\|C^*(t)\| < S$. Зададим число $\varepsilon > 0$ и оценим нормы матриц

$$\|M^*(t)\| = \|A^*(t) + B^*(t)(C^*(t))^T\| \leq K + LS = R$$

и $\|C(t)\| \leq \|C(t) - C^*(t)\| + \|C^*(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3L} + S = P$, где $K > 0$ и $L > 0$ такие, что $\|A(t)\| \leq K$, $\|B(t)\| \leq L$.

Далее оценим норму $\|y(t) - y_{h^*}^*(t)\|$. Решения $y(t)$ и $y_{h^*}^*(t)$ при $t \in [0, \omega]$ можно записать в следующем виде:

$$y_{h^*}^*(t) = E + \int_0^t M^*(t_1) Y_{h^*}(t_1) dt_1 + \sum_{i=0, h^*, 2h^*, \dots, \omega} c_i h^* \|Y(i)\| \int_i^t N^*(t_1) dt_1,$$

$$y(t) = E + \int_0^t M(t_1) Y(t_1) dt_1 - \int_0^t N(t_1) Y(t_1) dt_1 + \sum_{i=0, h^*, 2h^*, \dots, \omega} \|Y(i)\| \int_i^t N(t_1) dt_1.$$

Отсюда, переходя к норме при $t \in [0, \omega]$, получаем

$$\begin{aligned} & \|y_{h^*}^*(t) - y(t)\| \leq \int_0^t \|M^*(t_1) - M(t_1) + N(t_1)\| \times \|Y_{h^*}^*\| dt_1 + \\ & + \int_0^t \|M(t_1) - N(t_1)\| \times \|Y_{h^*}^*(t_1) - Y(t_1)\| dt_1 + \\ & + \sum_{i=0, h^*, 2h^*, \dots, \omega-1} \|c_i h^* - I\| \times \|Y(i)\| \int_i^t \|N^*(t_1) - N(t_1)\| dt_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Из формулы (12) при $t \in [0, \omega]$ находим

$$\|Y_{h^*}^*(t)\| \leq e^{h_k^* \|\bar{M}_k\|} e^{h_{k-1}^* \|\bar{M}_{k-1}\|} \dots e^{h_0^* \|\bar{M}_0\|} \leq e^{(h_0^* + h_1^* + \dots + h_k^*) R} = e^{\omega R}.$$

Так как $A(t), B(t) \in C_{[0, \omega]}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$

($\delta = \delta(\varepsilon)$), такое, что $\|A(t') - A(t'')\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\|B(t') - B(t'')\| \leq \frac{\varepsilon}{3P}$ при $t', t'' \in [0, \omega]$ и $\|t' - t''\| \leq \delta$. Разбив отрезок $[0, \omega]$ так, что $h_k^* < \delta$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) для всех $t \in [0, \omega]$, будем иметь $\|A^\circ(t) - A(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$,

$\|B^*(t) - B(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{3P}$, а следовательно,

$$\|M^*(t) - M(t) + N(t)\| \leq \|A^*(t) - A(t)\| + \|B^*(t)(C^*(t))^T\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + LS,$$

$$\|M(t) - N(t)\| = \|A(t)\| \leq K,$$

$$\begin{aligned} & \|N^\circ(t) - N(t)\| = \|B^*(t)(C^*(t))^T - B(t)(C(t))^T\| \leq \\ & \leq \|B^*(t)\| \cdot \|(C^*(t))^T - (C(t))^T\| + \|C^T(t)\| \cdot \|B^*(t) - B(t)\| \leq L \frac{\varepsilon}{3L} + P \frac{\varepsilon}{3P} = \frac{2}{3} \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (15) можно оценить как

$$\begin{aligned} \|y_{h^*}^*(t) - y(t)\| & \leq \int_0^t \left(\frac{\varepsilon}{3} + LS \right) \cdot \|Y_{h^*}^*\| dt_1 + \int_0^t K \cdot \|Y_{h^*}^*(t_1) - Y(t_1)\| dt_1 + \\ & + \sum_{i=0, h^*, 2h^*, \dots, \omega-1} \|c_i h - 1\| \cdot \|Y(i)\| \int_i^t \frac{2}{3} \varepsilon dt_1 \leq (\varepsilon + LS + \|c_i h - 1\| K) \omega \varepsilon e^{\omega R} + \\ & + \int_0^t K \|Y_{h^*}^*(t_1) - Y(t_1)\| dt_1. \end{aligned}$$

Применяя лемму Гронуолла-Беллмана [6], получим

$$\begin{aligned} \|y_{h^*}^*(t) - y(t)\| & \leq (\varepsilon + LS + \|c_i h - 1\| K) \omega \varepsilon e^{\omega R} \leq (\varepsilon + LS + \|c_i h - 1\| K) \omega \varepsilon e^{2\omega R} = \\ & = \Omega \omega \varepsilon e^{2\omega R}. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как число ε можно взять произвольно малым, то из неравенства (16) будем иметь

$$\lim_{\max_k h_k \rightarrow 0} \|y_{h^*}^*(t) - y(t)\| = 0.$$

Теорема доказана.

Библиографический список

1. Учватова Н.Н. Моделирование стабилизирующих управлений для уравнений Хилла и Матъе : дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Саранск, 2006. – 123 с.
2. Зубов В. И. Лекции по теории управления. – М. : Наука, 1975. – 496 с.
3. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. – М. : Наука, 1985. – 352 с.
4. Адамов Н.В. О колебаниях уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами и некоторых условиях устойчивости // Математический сборник. – 1935. – Т.42, вып. 6. – С. 647 – 651.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н.Ф. Добрынина, О.С. Мартышкина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики было получено в 1926 г. Эрвином Шредингером. Уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$-\frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \cdot \Psi. \quad (1)$$

Здесь $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·сек – постоянная Планка; m – масса частицы; $U(x, y, z, t)$ – потенциальная энергия частицы в силовом поле, где

движется частица $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

$\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ – искомая волновая функция частицы; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Уравнение (1) справедливо для любой частицы, движущейся со скоростью $v \ll c$ (c — скорость света в вакууме). Уравнение Шредингера дополняется важными условиями, которые накладываются на функцию $\Psi(x, y, z, t)$. Этим условий три:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| <p>1) функция Ψ должна быть конечной, непрерывной и однозначной;</p> <p>2) производные $\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ должны быть непрерывны;</p> <p>3) функция $\Psi ^2$ должна быть интегрируема, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi ^2 dx dy dz$ должен быть конечным.</p> | $\left. \vphantom{\int} \right\} (2)$ |
|--|---------------------------------------|

Уравнение (1) часто называют временным уравнением Шредингера, ибо оно содержит производную от функции Ψ по времени. Будем искать решение уравнения (1) в виде произведения двух функций:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot \varphi(t) \quad (3)$$

в котором разделены переменные: ψ является функцией только координат, φ – функцией только времени. Подставляя (3) в (1) и производя дифференцирование, получаем

$$-\frac{\hbar}{i}\psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi\Delta\psi + U(x, y, z) \cdot \psi\varphi$$

Разделим правую и левую части уравнения на произведение $\psi\varphi$:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{1}{\psi} \Delta\psi - U(x, y, z) = \frac{\hbar}{i} \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4)$$

$$\frac{\hbar}{i} \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -W \quad (5)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{1}{\psi} \Delta\psi - U(x, y, z) = -W \quad (6)$$

Уравнение (6) обычно записывают в форме

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U) \cdot \psi = 0 \quad (7)$$

и называют стационарным уравнением Шредингера.

Универсальным методом приближенного решения дифференциальных уравнений, применимым для широкого класса уравнений математической физики, является метод конечных разностей (или метод сеток).

Область непрерывного изменения аргументов (например, x и t) заменяется конечным (дискретным) множеством точек (узлов), называемым сеткой; вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки и называемые сеточными функциями. Производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются (аппроксимируются) при помощи соответствующих разностных отношений; дифференциальное уравнение при этом заменяется системой алгебраических уравнений (разностным уравнением).

Рассмотрим разностную схему для решения задачи Дирихле

$$\Delta u = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = -f(x), \quad x \in G, \quad u|_\Gamma = \mu(x), \quad (8)$$

где $x=(x_1, \dots, x_p)$; G есть p -мерная конечная область с границей Γ .

Построим разностный аналог оператора Лапласа

$$\Delta u = L_1 u + L_2 u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (9)$$

на плоскости $x=(x_1, x_2)$.

В точке $x=(x_1, x_2)$ каждый из операторов $L_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ или $L_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$

аппроксимируем трехточечным оператором Λ_1 или Λ_2 :

$$L_1 v \sim \Lambda_1 v = v_{\bar{x}_1 x_1} = \frac{1}{h_1^2} (v(x_1 + h_1, x_2) - 2v(x_1, x_2) + v(x_1 - h_1, x_2)), \quad (10)$$

$$L_2 v \sim \Lambda_2 v = v_{\bar{x}_2 x_2} = \frac{1}{h_2^2} (v(x_1, x_2 + h_2) - 2v(x_1, x_2) + v(x_1, x_2 - h_2)), \quad (11)$$

где \sim знак аппроксимации $h_1 > 0, h_2 > 0$ – заданные числа (шаги по осям x_1 и x_2).

Оператор Λ_1 определен на регулярном трехточечном шаблоне $(x_1 - h_1, x_2), (x_1, x_2), (x_1 + h_1, x_2)$, оператор Λ_2 – на регулярном трехточечном шаблоне $(x_1, x_2 - h_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 + h_2)$. Используя (3) и (4), заменим оператор Лапласа (2) разностным оператором

$$\Delta v = \Lambda_1 v + \Lambda_2 v = v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2}, \quad (12)$$

который определен на пятиточечном шаблоне «крест», состоящем из узлов $(x_1 \pm h_1, x_2), (x_1, x_2), (x_1, x_2 \pm h_2)$.

Из (10)–(12) и таблицы следует, что

$$\Delta v_0 = \frac{1}{h_1^2} (v_1 - 2v_0 + v_3) + \frac{1}{h_2^2} (v_2 - 2v_0 + v_4). \quad (13)$$

В частности, при $h_1 = h_2 = h$ (на квадратном шаблоне) имеем

$$\Delta v_0 = \frac{1}{h^2} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v_0). \quad (14)$$

Аналогично строится разностная аппроксимация p -мерного ($p > 2$) оператора Лапласа

$$L u = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u, \quad L_{\alpha} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2}. \quad (15)$$

Заменяя L_{α} трехточечным разностным оператором Λ_{α} , получаем

$$\Delta v = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} v, \quad \Lambda_{\alpha} v = v_{\bar{x}_{\alpha} x_{\alpha}}. \quad (16)$$

*Результаты решения для частицы в одномерной прямоугольной
«потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»
при разбиении области на 10 узлов*

Номер	Узлы	Аналитические значения	Приближенные значения
0	0	0	0
1	0,1	0,437016024	0,436383111
2	0,2	1,344997024	1,34417212
3	0,3	0,437016023	0,442707878
4	0,4	-1,344997023	-1,348248964
5	0,5	1,414213562	1,414115717
6	0,6	-1,344997025	-1,352206405
7	0,7	0,437016028	0,467907543
8	0,8	1,344997027	1,331228847
9	0,9	0,437016032	0,385448959
10	1	0	0,066518871

Приведенные выше разностные операторы позволяют моделировать стационарное уравнение Шредингера при различных потенциалах и граничных условиях.

Библиографический список

1. Albert Dr., Sharifulin N.Статья «Лекции» (Интернет-ресурс <http://sharifulin.pstu.ru>).
2. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – Гл. XVI.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

**О ВЫБОРЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ОКОЛОЗЕМНОЙ АСТРОНОМИИ**

С.И. Исаева

Сибирский федеральный университет,
г. Красноярск, Россия

Задача описания гравитационного взаимодействия трех тел (Земля, Луна, Солнце) привлекала внимание математиков на протяжении столетий. Однако построить общее решение (как для задачи двух тел) пока не удается, хотя сделано немало открытий в этом направлении. Поэтому актуальным является вопрос создания эффективных численных методов решения подобных задач.

Система дифференциальных уравнений, описывающая в гелиоцентрической системе координат орбитальное движение Земли и Луны

относительно радиус-векторов центров масс Земли \vec{r}_E и Луны \vec{r}_M [1], имеет вид:

$$\frac{d^2\vec{r}_E}{dt^2} = -Gm_s \frac{\vec{r}_E}{|\vec{r}_E|^3} - Gm_M \frac{\vec{r}_E - \vec{r}_M}{|\vec{r}_E - \vec{r}_M|^3}, \quad \frac{d^2\vec{r}_M}{dt^2} = -Gm_s \frac{\vec{r}_M}{|\vec{r}_M|^3} - Gm_E \frac{\vec{r}_M - \vec{r}_E}{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3}. \quad (1)$$

Обычно эти соотношения записывают как систему дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенную относительно производных и для анализа устойчивости численного метода решения такой системы необходимо оценить собственные значения матрицы Якоби её правой части. Но квадраты собственных чисел матрицы Якоби системы первого порядка эквивалентной (1), являются собственными значениями матрицы Якоби $J_{E,M}$ системы второго порядка (1) относительно радиус-векторов \vec{r}_E и \vec{r}_M . которая, как легко проверить, имеет блочный вид

$$\mathbf{J}_{E,M} = \begin{pmatrix} m_s \mathbf{G}_{\vec{r}_E} + m_M \mathbf{G}_{(\vec{r}_M - \vec{r}_E)} & -m_M \mathbf{G}_{(\vec{r}_M - \vec{r}_E)} \\ -m_E \mathbf{G}_{(\vec{r}_M - \vec{r}_E)} & m_s \mathbf{G}_{\vec{r}_M} + m_E \mathbf{G}_{(\vec{r}_M - \vec{r}_E)} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь через $\mathbf{G}_{\vec{r}}$ обозначена зависящая от \vec{r} квадратная трехмерная матрица

$$\mathbf{G}_{\vec{r}} = \frac{G}{|\vec{r}|^3} \cdot \left[3 \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) \otimes \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) - \mathbf{E}_3 \right], \quad |\vec{r}| = \sqrt{(\vec{r}, \vec{r})}, \quad (3)$$

где \mathbf{E}_3 – единичная матрица порядка три, $\vec{a} \otimes \vec{b}$ – матрица, равная тензорному произведению трехмерных векторов \vec{a} и \vec{b} : по определению, для произвольного любого вектора \vec{c} имеем $(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b}, \vec{c}) \cdot \vec{a}$, где (\vec{a}, \vec{b}) – скалярное произведение трехмерных векторов \vec{a} и \vec{b} . Свойства матрицы $\mathbf{G}_{\vec{r}}$ описываются легко доказываемым утверждением:

Лемма. Для $\forall \vec{r} \neq 0$ матрица $\mathbf{G}_{\vec{r}} = \mathbf{G}_{-\vec{r}}$ симметрична $\mathbf{G}_{\vec{r}} = (\mathbf{G}_{\vec{r}})^T$ и имеет два инвариантных подпространства, одно из которых параллельно вектору \vec{r} и соответствует собственному значению $\lambda_{\vec{r},1} = 2G|\vec{r}|^{-3}$, а второе – ортогонально первому и ассоциировано с двукратным собственным значением $\lambda_{\vec{r},2} = -G|\vec{r}|^{-3}$.

Вернемся к системе дифференциальных уравнений (1). Пусть вектор $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} \vec{\delta}_E \\ \vec{\delta}_M \end{pmatrix}$ (здесь, вообще говоря, $\vec{\delta}_E, \vec{\delta}_M$ – трёхмерные комплекснозначные векторы) является собственным для матрицы $\mathbf{J}_{E,M}$, т.е. $\mathbf{J}_{E,M} \vec{\delta} = \lambda \vec{\delta}$. Тогда должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} (m_S \mathbf{G}_{\vec{r}_E} + m_M \mathbf{G}_{(\vec{r}_M - \vec{r}_E)}) \vec{\delta}_E - m_M \mathbf{G}_{(\vec{r}_M - \vec{r}_E)} \vec{\delta}_M &= \lambda \vec{\delta}_E, \\ -m_E \mathbf{G}_{(\vec{r}_M - \vec{r}_E)} \vec{\delta}_E + (m_S \mathbf{G}_{\vec{r}_M} + m_E \mathbf{G}_{(\vec{r}_M - \vec{r}_E)}) \vec{\delta}_M &= \lambda \vec{\delta}_M. \end{aligned}$$

В силу сказанного выше матрица $\mathbf{J}_{E,M}$ имеет двумерное инвариантное подпространство, образованное векторами $\vec{\delta}_E$ и $\vec{\delta}_M$, ортогональными плоскости векторов \vec{r}_E и \vec{r}_M . Следовательно, соответствующие вещественные собственные значения λ_{\perp} обязаны удовлетворять квадратному уравнению

$$\begin{aligned} \lambda_{\perp}^2 + \lambda_{\perp} \left(\frac{Gm_S}{|\vec{r}_M|^3} + \frac{Gm_S}{|\vec{r}_E|^3} + \frac{G(m_E + m_M)}{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3} \right) + \\ + \left(\frac{Gm_S}{|\vec{r}_M|^3} + \frac{Gm_E}{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3} \right) \left(\frac{Gm_S}{|\vec{r}_E|^3} + \frac{Gm_M}{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3} \right) - \frac{G^2 m_E m_M}{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^6} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В дальнейших построениях будем полагать, что безразмерные величины $\frac{m_E}{m_S}, \frac{m_M}{m_S}, \frac{m_M}{m_E}, \frac{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|}{|\vec{r}_E|}$ пренебрежимо малы по сравнению с 1,

поскольку $\frac{m_E}{m_S} \approx 3 \cdot 10^{-9}$, $\frac{m_M}{m_S} \approx 4 \cdot 10^{-11}$, $\frac{m_M}{m_E} \approx 10^{-2}$, $\frac{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|}{|\vec{r}_E|} \approx 2 \cdot 10^{-3}$.

В таком случае из (4) получаем приближенные выражения для собственных значений:

$$\begin{aligned} \lambda_{\perp}^E = -\frac{Gm_S}{|\vec{r}_E|^3} \left[1 + \frac{1}{2} \left[\frac{|\vec{r}_E|^3}{|\vec{r}_M|^3} - \left(\frac{|\vec{r}_E|^3 m_E}{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3 m_S} \right) \right] \left(\frac{|\vec{r}_E|^3 m_E}{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3 m_S} \right) \frac{m_M}{m_E} + \right. \\ \left. + O\left(\frac{m_M}{m_E} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\lambda_{\perp}^M = -\frac{G m_s}{|\vec{r}_E|^3} \left\{ \frac{|\vec{r}_E|^3}{|\vec{r}_M|^3} + \left(\frac{|\vec{r}_E|^3 m_E}{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3 m_s} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{|\vec{r}_E|^3}{|\vec{r}_M|^3} + \left(\frac{|\vec{r}_E|^3 m_E}{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3 m_s} \right) \right] \left(\frac{|\vec{r}_E|^3 m_E}{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3 m_s} \right) \frac{m_M}{m_E} + O \left(\frac{m_M}{m_E} \right)^2 \}.$$

В случае, когда векторы \vec{r}_E и \vec{r}_M коллинеарны, т.е. в моменты полного солнечного или лунного затмения, описанное выше инвариантное подпространство матрицы $\mathbf{J}_{E,M}$ оказывается четырехмерным и собственные значения λ_{\perp}^E и λ_{\perp}^M из (5) становятся двукратными.

Рассмотрим теперь инвариантное подпространство матрицы Якоби $\mathbf{J}_{E,M}$, образованное векторами $\vec{\delta}_E$ и $\vec{\delta}_M$, лежащими в плоскости векторов \vec{r}_E и \vec{r}_M , которые считаем неколлинеарными. Сделаем замену

$$\lambda = \frac{G m_E}{|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3} \mu \text{ и придем к спектральной задаче: } \mathbf{J}_{\alpha,\beta} \vec{\gamma} = \mu \vec{\gamma}, \text{ где}$$

$$\mathbf{J}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \left[2C_E - \frac{m_M}{m_E} \right] & [3C_E C_{EM}] & \left[\frac{m_M}{m_E} \right] & [0] \\ \left[3C_{EM} \frac{m_M}{m_E} \right] & \left[2\frac{m_M}{m_E} - C_E \right] & \left[-3C_{EM} \frac{m_M}{m_E} \right] & \left[-2\frac{m_M}{m_E} \right] \\ [1] & [0] & \left[2C_E - 1 - 3C_M C_{EM} \frac{m_M}{m_E} \right] & \left[3C_E C_{EM} + C_M (1 - 5C_{EM}^2) \frac{m_M}{m_E} \right] \\ [-3C_{EM}] & [-2] & \left[3C_{EM} + C_M \frac{m_M}{m_E} \right] & \left[2 - C_E + 2C_M C_{EM} \frac{m_M}{m_E} \right] \end{pmatrix},$$

$$C_E = 3 \frac{m_s |\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3}{m_E |\vec{r}_E|^3} \approx \frac{3}{8}, \quad C_{EM} = \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_E, \vec{r}_E)}{|\vec{r}_M - \vec{r}_E| |\vec{r}_E|}, \quad |C_{EM}| \leq 1,$$

$$C_M = 3 \frac{m_s |\vec{r}_M - \vec{r}_E|^4}{m_M |\vec{r}_E|^4} \approx \frac{3}{16}.$$

Будем искать собственные значения $\mu = v_0 + v_1 \cdot \frac{m_M}{m_E} + v_2 \cdot \left(\frac{m_M}{m_E}\right)^2 \dots$

матрицы $\mathbf{J}_{\alpha,\beta}$ в виде асимптотического ряда по малому параметру $\frac{m_M}{m_E}$.

Тогда v_0 должно удовлетворять уравнению четвёртой степени

$$v_0 \left[\frac{C_E (3 - 9C_{EM}^2) - v_0}{2} + \frac{9}{2} C_E C_{EM}^2 \right] \times \\ \times \left[(v_0 - 1) \left(-1 + \frac{C_E (3 - 9C_{EM}^2) - v_0}{2} \right) + \frac{9}{2} C_E C_{EM}^2 v_0 \right] = 0,$$

у которого есть двукратный корень $v_0=0$ и два вещественных:

$$v_0 = \frac{3}{2} \left(C_E + \sqrt{(C_E - 1)^2 + 4C_E C_{EM}^2} \right) - \frac{1}{2} > 0,$$

$$v_0 = \frac{3}{2} \left(C_E - \sqrt{(C_E - 1)^2 + 4C_E C_{EM}^2} \right) - \frac{1}{2} < 0.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем, что инвариантное подпространство матрицы Якоби $\mathbf{J}_{E,M}$ из (2) – (3), лежащее в плоскости векторов \vec{r}_E и \vec{r}_M , ассоциируется с однократными собственными значениями

$$\frac{Gm_E}{2|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3} \left[C_E + 1 - 3\sqrt{(C_E - 1)^2 + 4C_E C_{EM}^2} \right] < 0, \\ \frac{Gm_E}{2|\vec{r}_M - \vec{r}_E|^3} \left[C_E + 1 + 3\sqrt{(C_E - 1)^2 + 4C_E C_{EM}^2} \right] > 0. \quad (6)$$

с точностью до нескольких процентов. Кроме того, у матрицы есть еще два собственных значения, по модулю значительно меньших приведенных.

Таким образом среди собственных значений матрицы Якоби системы первого порядка, эквивалентной (1), имеются как вещественные отрицательные и положительные, так и чисто мнимые, квадраты наибольших по модулю собственных чисел приведены в (5) и (6). Следовательно, метод численного интегрирования системы (1) должен быть устойчивым в левой полуплоскости комплексной плоскости, неустойчивым в правой полуплоскости и модуль функции устойчивости должен быть равен единице на мнимой оси [2]. Соотношения (5) и (6) могут быть использованы для выбора оптимального шага по времени.

Библиографический список

1. Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010 – 588 с.
2. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. – Новосибирск: Наука, 1997. – 197 с.

**ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ
РАСSEИВАЮЩИХ ЦЕНТРОВ ПО НАБОРУ ПРОЕКЦИЙ**

А.Н. Бондаренко, В.А. Дедок, Л.А. Козинкин, М.П. Токарев*

Институт математики СО РАН им. С.Л. Соболева,
г. Новосибирск, Россия

Рассматривается актуальная задача определения максимального подмножества множества точек в R^3 по ограниченному набору их двумерных проекций. Данная задача естественно возникает в приложениях физической гидроаэродинамики для оптической диагностики реальных течений жидкости и газа путем измерения мгновенных полей скорости в объеме потока. Предложены методы восстановления указанного множества и определения достаточности измерений для однозначного решения обратной задачи. Кроме того, в работе разрабатывается итеративный алгоритм вычисления максимального множества, а так же метод индексной оптимизации для существенного уменьшения количества вычислений при численном решении задачи.

В настоящее время томографические методы широко применяются для исследования внутренней структуры объектов. В основном, они используются в медицинской диагностике, в промышленности и строительстве для контроля качества всевозможных изделий и инженерных сооружений. Математический аппарат вычислительной томографии изложен в монографиях [1, 2]. В последнее время все чаще стали появляться примеры использования томографии и в других областях науки и техники. Например, оптическая томография рассеивающих сред сравнительно недавно стала применяться, в хорошо зарекомендовавшем себя, методе цифровой трассерной визуализации – Particle Image Velocimetry (PIV) [3, 4, 5].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00105), междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 14 «Обратные задачи и их приложения: теория, алгоритмы, программы».

В данной работе предложен и математически обоснован алгоритм получения максимального множества точек, проекции которого в плоскости заданные светочувствительными матрицами камер совпадают с зарегистрированными проекциями.

Сформулируем задачу в ее математической постановке.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – множество попарно различных точек в R^3 . Обозначим через $P_\pi = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ – проекцию точек из множества X на плоскость π . Очевидным образом выполняется неравенство $m \leq n$, и, в общем случае, $m = m(X, \pi)$. Здесь и далее, будем считать, что любая точка из исходного множества не совпадает с любой ее проекцией.

Пусть далее задан набор плоскостей $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ и набор проекций точек из множества X на каждую из плоскостей $P_{\pi_1}, P_{\pi_2}, \dots, P_{\pi_k}$. Сформулируем следующую обратную задачу: для заданных множеств точек проекций $P_{\pi_1}, P_{\pi_2}, \dots, P_{\pi_k}$ на плоскости $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ восстановить исходное множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Очевидным образом, исходное множество точек X для конкретного набора плоскостей и проекций не всегда может быть восстановимо. В частности, задача не имеет однозначного решения, если количество плоскостей равно 2. Без потери общности можно считать, что плоскости π_j попарно непараллельны, т.к. в случае параллельных плоскостей множества проекций совпадают с точностью до параллельного переноса.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – множество точек в R^3 , $P_{\pi_1}, P_{\pi_2}, \dots, P_{\pi_k}$ – проекции X на набор плоскостей $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ ($P_\pi = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$). Пусть так же система уравнений на проекции имеет единственное решение, такое что $t_{j,n} \in R$, все, кроме одного $C_{ij,k}$ для каждой строки l равны 0, а один равен 1. Тогда исходное множество X единственным образом определяется по множеству проекций.

Практически более интересной является задача определения характеристик исходного множества без знания какой-либо дополнительной информации о нем.

Как было уже замечено, обратная задача по восстановлению множества по набору проекций в общем случае не имеет единственного решения, поэтому переформулируем ее в несколько ином контексте.

Определение. В условиях предыдущих обозначений назовем множество $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ **подходящим**, если проекция этого множества на плоскость π_j совпадает с множеством P_j для любого j и любое расширение множества Y нарушает это условие.

Тем самым множество Y является максимальным множеством, проекции которого на заданные плоскости π_j совпадают с множествами P_j . Очевидно $X \subseteq Y$.

Конструктивный алгоритм восстановления подходящего множества Y состоит в выполнении следующих операций:

1. Восстановление подходящего множества для двух плоскостей (множества Z);
2. Последовательное исключение лишних точек путем проецирования на оставшиеся плоскости.

Для получения множества Y из множества Z необходимо исключить те точки, которые не являются проекциями на все оставшиеся плоскости π_3, \dots, π_k .

Чтобы упростить задачу исключения точек, попадающих в $Z \setminus Y$ достаточно применить аффинное преобразование, переводящее плоскости π_1, π_2 и π_q ($3 \leq q \leq k$) во взаимно ортогональные (координатные) плоскости.

Замечание 1. Для построения исходного множества Z так же можно использовать аффинное преобразование, приводящее плоскости π_1 и π_2 во взаимно ортогональные.

Замечание 2. С вычислительной точки зрения алгоритм нахождения подходящего множества может быть существенно оптимизирован за счет разбиения пространства на кубы, проекции которых на плоскости известны, при расчете проекций достаточно использовать точки, попадающие в проекции этих кубов (метод индексной оптимизации).

Тем самым мы предложили алгоритм восстановления подходящего множества для множества проекций. Более точное приближение множества Y к множеству X можно выполнять за счет увеличения количества проекций, что очень трудоемко в условиях реальных практических измерений.

Библиографический список

1. Хермен Г.Т. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. – М.: Мир, 1983.
2. Лаврентьев М.М., Зеркаль С.М., Трофимов О.Е. Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. – Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999.

3. Raffel M., Willet C.E., Wereley S.T., Kompenhans J. Particle Image Velocimetry. Practical Guide. – Berlin: Springer, 2007.

4. Elsinga G.E., Scarano F., Wieneke B., van Oudheusden B.W. Tomographic particle image velocimetry // Exp. Fluids. – 2006. – Vol. 41. – P. 933 – 947.

5. Бильский А.В., Ложкин В.А., Маркович Д.М., Токарев М.П., Шестаков М.В. Оптимизация и тестирование томографического метода измерения скорости в объеме потока // Теплофизика и аэромеханика. – 2011. – Т. 18. – №4. – С. 555 – 566.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕСЧЕТА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕДАХ

Т.В. Елисеева, К.А. Степанцова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Задача интерпретации гравитационных данных – по данным гравитационных измерений на поверхности Земли – рассчитать аномальное гравитационное поле на некоторой глубине под поверхностью Земли и сделать выводы о рельефе фундамента, о расположении и форме интрузий. В данной работе рассматривается случай, когда в слое осадков существует две границы раздела сред, направленные по нормали к поверхности Земли.

Моделирование процесса пересчета гравитационного поля в случае существования двух разделов сред приводит к системе уравнений Лапласа

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} = 0, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где функция

$$u(x, y) = \theta(-x)u_1(x, y) + \theta(x)\theta(l-x)u_2(x, y) + \theta(x-l)u_3(x, y),$$

ограниченная в области

$$D_2 = \{(x, y) | x \in (-\infty, 0) \cup (0, l) \cup (l, +\infty); y \in (0, +\infty)\},$$

$\theta(x)$ – функция Хевисайда, с идеальными условиями сопряжения

$$u_1(0, y) = u_2(0, y), \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, y), \quad k_1 > 0; \quad (2)$$

$$u_2(l, y) = u_3(l, y), \quad k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(l, y) = \frac{\partial u_3}{\partial x}(l, y), \quad k_2 > 0. \quad (3)$$

На поверхности Земли ($y = 0$) величина $u(x, 0)$ может быть измерена

$$u(x, 0) = g(x), \quad g(x) = \theta(-x)g_1(x) + \theta(x)\theta(l-x)g_2(x) + \theta(x-l)g_3(x).$$

Требуется найти значение функции

$$u_j(x, h) = f_j(x), \quad j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Прямое F и обратное F^{-1} преобразования Фурье на декартовой оси с двумя точками сопряжения $x = 0$, $x = l$ задаются по правилам [3]

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\lambda) = F[g_j](\lambda) = & \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 \varphi_1^*(\xi, \lambda) g_1(\xi) d\xi + \right. \\ & \left. + \int_0^l \varphi_2^*(\xi, \lambda) g_2(\xi) d\xi + \int_l^{\infty} \varphi_3^*(\xi, \lambda) g_3(\xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} g_1(x) = F^{-1}[\tilde{g}](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, \lambda) \tilde{g}(\lambda) d\lambda, \quad x < 0, \\ g_2(x) = F^{-1}[\tilde{g}](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x, \lambda) \tilde{g}(\lambda) d\lambda, \quad 0 < x < l, \\ g_3(x) = F^{-1}[\tilde{g}](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_3(x, \lambda) \tilde{g}(\lambda) d\lambda, \quad x > l. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

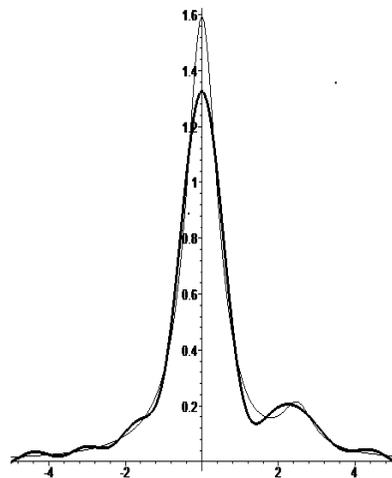
В образах Фурье системе (1) соответствует обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\lambda^2 \tilde{u}(x, y) + \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} = 0.$$

При условии, что $\tilde{u}(\lambda, h) = \tilde{f}(\lambda)$, решение данного уравнения выглядит следующим образом: $\tilde{u}(\lambda, y) = \tilde{f}(\lambda) e^{|\lambda|(y-h)}$.

Действуя на обе части равенства обратным преобразованием Фурье (6) и учитывая, что $u_j(x, 0) = g_j(x)$ при $y = 0$, получим систему

$$g_j(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \varphi_j(x, \lambda) e^{-|\lambda|h} \left[\int_{-\infty}^0 \varphi_1^*(\xi, \lambda) f_1(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^l \varphi_2^*(\xi, \lambda) f_2(\xi) d\xi + \int_l^{\infty} \varphi_3^*(\xi, \lambda) f_3(\xi) d\xi \right] d\lambda, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7)$$



— Приближенное решение
 - - - Точное решение

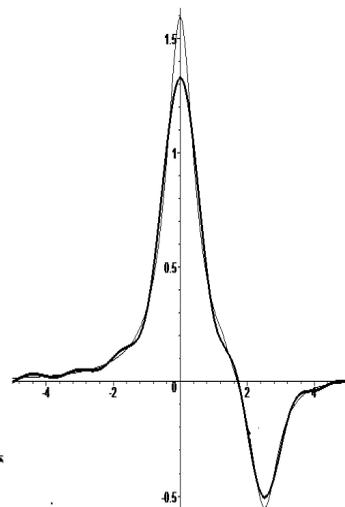
$$h = 0.2$$

$$l = 1.25$$

$$k_1 = 1.5$$

$$k_2 = 1.8$$

Рис. 1



— Приближенное решение
 - - - Точное решение

$$h = 0.2$$

$$l = 1.25$$

$$k_1 = 1.5$$

$$k_2 = 0.8$$

Рис. 2

Таким образом, решение задачи (1) – (3) приводит к системе интегральных уравнений (7) относительно $f_j(\xi)$, $j = 1, 2, 3$. Численное решение данной системы складывается из трех этапов:

1. Действуем на систему (7) преобразованием Фурье (5). В образах Фурье получаем

$$e^{-|\lambda|h} \tilde{f}(\lambda) = \tilde{g}(\lambda). \quad (8)$$

2. Уравнение (8) решаем итерационным методом [1] или методом регуляризации [2].

3. Действуем обратным преобразованием Фурье (6) и получаем решение системы (7).

Результаты численного решения задачи приведены на графиках (рис. 1 и 2).

Библиографический список

1. Бойков И. В. Итерационные методы решения уравнений в свертках. Известие вузов. Математика – 1998. – №2. – С. 8 – 15.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
3. Елисеева Т.В. Математическое моделирование температурных и потенциальных полей в кусочно-однородных средах / Препринт №98. – Саранск, 2007.

К ПРОБЛЕМЕ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЙ БУРГЕРСА

В.А. Рязанцев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Обратимся к анализу математической модели, свойства которой аналогичны свойствам турбулентного течения. Эта модель, принадлежащая Бургерсу, описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = P - u^2 - \nu U, \\ \frac{du}{dt} = Uu - \nu u. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь переменная U обозначает основное движение, u – добавочное турбулентное движение, P – постоянная, характеризующая давление, а постоянная ν задает значение кинематической вязкости [1].

Система (1) имеет три неподвижные точки:

1. $U = \frac{P}{\nu}, u = 0.$
2. $U = \nu, u = \sqrt{P - \nu^2}.$
3. $U = \nu, u = -\sqrt{P - \nu^2}.$

Система уравнений (1) относительно возмущений стационарного решения 1 имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -vx_1 - x_2^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2x_1 + \left(-v + \frac{P}{v}\right)x_2, \end{cases} \quad (2)$$

где $U = x_1 + P/v$ и $u = x_2$.

Для системы (2) введем следующую матрицу $B(t)$:

$$B(t) = \begin{pmatrix} -v & -x_2 \\ x_2 & -v + \frac{P}{v} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Согласно [3], для устойчивости (асимптотической устойчивости) системы (2) достаточно (теорема 5.1), чтобы логарифмическая норма матрицы $B(t)$ по крайней мере при $t > t_0$ была отрицательной (меньшей $-\gamma$, где γ – некоторое положительное число). Для системы (2) логарифмическая норма матрицы $B(t)$ в метрике E_2 $\left(\|x\| = \sqrt{\sum_k x_k^2}\right)$ вычисляется по формуле [2]:

$$L(B)(t) = \lambda_{\max} \left(\frac{B + B^T}{2} \right), \quad (4)$$

т. е. как максимальное собственное значение матрицы $\frac{B + B^T}{2}$.

Вычисления дают следующий критерий устойчивости (асимптотической устойчивости)

$$P < v^2 \quad \left(P < (1 - \varepsilon)v^2, \quad 0 < \varepsilon < 1 \right). \quad (5)$$

Замечание 1. Условие (5) не включает в себя никаких ограничений на величину возмущений $|x_1|, |x_2|$. поэтому оно означает, что при выполнении неравенства (5) для нелинейной системы (2) имеет место устойчивость в целом.

При выполнении неравенства $P < v^2$ для системы (1) существуют стационарные точки 2 и 3.

Система (1) относительно возмущений стационарной точки 2 (стационарной точки 3) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -vx_1 - 2u_0x_2 - x_2^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = u_0x_1 + x_1x_2. \end{cases} \quad \left(\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -vx_1 + 2u_0x_2 - x_2^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -u_0x_1 + x_1x_2. \end{cases} \right), \quad (6)$$

где $u_0 = \sqrt{P - v^2}$.

Для проведения анализа устойчивости системы введём новые неизвестные функции:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1 + \alpha_1 x_2, \quad (y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1 + \alpha_2 x_2), \quad (7)$$

где α_1 (α_2) – свободный параметр. Для функций y_1, y_2 имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \left(-v + \frac{2u_0}{\alpha_1} \right) y_1 - \frac{2u_0}{\alpha_1} y_2 - \frac{y_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{2y_1 y_2}{\alpha_1^2} - \frac{y_2^2}{\alpha_1^2}, \\ \frac{dy_2}{dt} = \left(-v + \frac{2u_0}{\alpha_1} + \alpha_1 u_0 \right) y_1 - \frac{2u_0}{\alpha_1} y_2 - \left(\frac{1}{\alpha_1^2} + I \right) y_1^2 + \left(\frac{2}{\alpha_1^2} + I \right) y_1 y_2 - \frac{y_2^2}{\alpha_1^2}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \left(-v - \frac{2u_0}{\alpha_2} \right) y_1 + \frac{2u_0}{\alpha_2} y_2 - \frac{y_1^2}{\alpha_2^2} + \frac{2y_1 y_2}{\alpha_2^2} - \frac{y_2^2}{\alpha_2^2}, \\ \frac{dy_2}{dt} = \left(-v - \frac{2u_0}{\alpha_2} - \alpha_2 u_0 \right) y_1 + \frac{2u_0}{\alpha_2} y_2 - \left(\frac{1}{\alpha_2^2} + I \right) y_1^2 + \left(\frac{2}{\alpha_2^2} + I \right) y_1 y_2 - \frac{y_2^2}{\alpha_2^2}. \end{cases} \quad (8')$$

Замечание 2. Система (8) переходит в систему (8'), если в (8') положить $\alpha_2 = -\alpha_1$. Таким образом, исследование устойчивости будет одинаковым для систем (8) и (8').

Матрица $B(t)$ для системы (8) имеет вид:

$$B(t) = \begin{pmatrix} -v + \frac{2u_0}{\alpha_1} - \frac{y_1}{\alpha_1^2} + \frac{2y_2}{\alpha_1^2} & -\frac{2u_0}{\alpha_1} - \frac{y_2}{\alpha_1^2} \\ -v + \frac{2u_0}{\alpha_1} + \alpha_1 u_0 - \frac{y_1}{\alpha_1^2} - y_1 & -\frac{2u_0}{\alpha_1} + \frac{2y_1}{\alpha_1^2} + y_1 - \frac{y_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Логарифмическая норма матрицы $B(t)$ в метрике пространства R_1 ($\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$) вычисляется по следующей формуле [2]:

$$\Lambda(B)(t) = \sup_j \left(b_{jj} + \sum_{k=1, k' \neq j}^n |b_{jk'}| \right). \quad (10)$$

Для каждого фиксированного значения α_1 критерий асимптотической устойчивости, полученный из требования отрицательности $\Lambda(\mathbf{B})(t)$, фиксирует интервал значений ν , определяемый формулой

$$\nu \in (2\beta_1 u_0, 2\beta_2 u_0), \quad (11)$$

где $\beta_1 = \max\left(\frac{\alpha_1}{2}, \frac{2}{\alpha_1}\right)$, $\beta_2 = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{2}{\alpha_1}$.

Если значение ν принадлежит указанному интервалу, то имеет место устойчивость системы (8). Наиболее общий критерий устойчивости получается в результате объединения интервалов вида (11) для всех возможных положительных значений α . Решением этой задачи будет условие

$$2u_0 < \nu. \quad (12)$$

При выполнении этого условия для достаточно малых возмущений x_1, x_2 система (8) является асимптотически устойчивой.

Границы устойчивости определяются следующим образом. Пусть условие (12) выполнено. Тогда существует такое число $\gamma > 2$, что справедливо представление $\nu = \gamma u_0$. Также введем обозначение $|y| = \max(|y_1|, |y_2|)$, где y_1, y_2 – величины возмущений, входящие в (9). Тогда нетрудно показать, что границы устойчивости определяются неравенством:

$$|y| < u_0 \cdot \min\left\{\frac{\alpha_1^2}{4}\left(\gamma - \frac{4}{\alpha_1}\right), \frac{\alpha_1^2}{4 + 2\alpha_1^2}\left(\frac{2}{\alpha_1} - \left|\frac{2}{\alpha_1} + \alpha_1 - \gamma\right|\right)\right\}. \quad (13)$$

Замечание 3. Границы устойчивости могут быть уточнены, если провести анализ устойчивости при различных предположениях относительно знаков возмущений y_1, y_2 ; пересечение четырех полученных областей устойчивости станет решением общей задачи.

Распространение результатов (12), (13) на систему (8') с учетом замечания 2 не составляет труда.

Библиографический список

1. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. – 486 с.
2. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 335 с.
3. Бойков И.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2008. – 244 с.

УСТОЙЧИВОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОЛЬТЕРРА С ДВУМЯ ЖЕРТВАМИ И ОДНИМ ХИЩНИКОМ

И.В. Бойков, Н.В. Печникова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В работе получены критерии устойчивости математической модели Вольтерра с двумя жертвами и одним хищником

Введение.

1. Применение математических методов в биологии и экологии восходит к раннему Возрождению. Леонардо Пизанский (Фибоначчи) в 1202 г. дал анализ популяции кроликов, в результате которого в математику введены числа Фибоначчи. Интересно отметить, что числа Фибоначчи используют во многих разделах математики, включая вычислительную математику.

Более общие математические модели были построены Дж. Борелли в 1680 г. Среди известных математических моделей экологии необходимо упомянуть модель Т. Мальтуса (1802 г.) и модель Ферхюльста (1838 г.).

В 1802 г. австрийский священник Мальтус опубликовал модель динамики человеческой популяции, описываемую уравнением

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t),$$

где $N(t)$ – численность популяции в момент времени t ; r – биологический потенциал.

Эта модель была основана на статистическом материале Северо-Американских штатов и достаточно точно отражала динамику развития населения в Северо-Американских штатах в начале 19 века.

Однако эта модель не отражала ограниченности пищевых ресурсов. В 1838 году бельгийский математик Ферхюльст предложил модель, учитывающую ограниченность пищевых и других ресурсов.

Несмотря на существование этих и ряда других моделей, становление математической экологии, как науки, обычно датируют 1925 г., когда В. Вольтерра представил [1] свою модель взаимодействия хищника и жертвы, позволившую объяснить ранее непонятное сезонное изменение количества хищных и нехищных рыб в Средиземном море.

Система уравнений, предложенная В. Вольтерра, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx^2(t) - cx(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -ey(t) + c_1x(t)y(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

где $y(t)$ – плотность хищных рыб, $x(t)$ – плотность жертв (нехищных рыб), a, b, c, e, c_1 – коэффициенты, не зависящие от времени.

Работа В. Вольтерра [1] положила начало многочисленным исследованиям.

Другую модель взаимодействия хищника и жертвы предложил Лесли [2]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx^2(t) - cx(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = ey(t) - f \frac{y^2(t)}{x(t)} \end{cases} \quad (1.2)$$

Сравнительный анализ моделей Вольтерра и Лесли дан в книге Смита [3], в которой приведены аргументы обосновывающие предпочтительность модели Вольтерра модели Лесли.

Представляет интерес объединение моделей Вольтерра и Лесли:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx^2(t) - cx(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = ey(t) + c_1x(t)y(t) - d \frac{y^2(t)}{1+x(t)} \end{cases} \quad (1.3)$$

Устойчивость этой модели исследована в работе [10].

Одним из обобщений модели Вольтерра является модель с убежищем для жертвы.

Недостатком модели Вольтерра является ее «мягкость». «Грубые» модели экологии введены А.Н. Колмогоровым [4].

Эти модели имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a(x(t)) - V(x(t))y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = K(x(t))y(t) \end{cases}$$

К этому типу моделей относится и модель Розенцвейга – Мак-Артура [5]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) - \phi(x(t), y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -ey(t) + k\phi(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Модели Вольтерра, в которых учитывается запаздывание, обусловленное временем τ развития хищника, рассмотрели Вангерсли и Каннингэм [6]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - cx(t)y(t) - bx^2(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -ey(t) + c_1x(t-\tau)y(t-\tau) \end{cases}$$

Модели Вольтерра для неперекрывающихся поколений имеют вид [7]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - cx_n y_n \\ y_{n+1} = -ey_n + c_1 x_n y_n \end{cases}$$

где x_n, y_n – число особей жертв и хищников в n -м году.

Наряду с детерминированными моделями математической экологии большое внимание уделяется стохастическим моделям и моделям, основанным на методах стохастической динамики.

Обобщение моделей Вольтерра, учитывающие фактор насыщения, рассматривались в книге Базыкина [7]. В частности, в [7] были рассмотрены следующие модели конкуренции жертв и насыщения хищника:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \frac{K - x(t)}{x(t)} - \frac{bx(t)y(t)}{1 + Ax(t)} \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + \frac{dx(t)y(t)}{1 + Ax(t)} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - \frac{bx^2(t)y(t)}{1 + Ax^2(t)} \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + \frac{dx^2(t)y(t)}{1 + Ax^2(t)} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - \frac{bx(t)y(t)}{1 + Ax(t)} \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + \frac{dx(t)y(t)}{1 + Ax(t)} - ey^2(t) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - \frac{bx(t)y(t)}{(1 + Ax(t))(1 + By(t))} \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + \frac{dx(t)y(t)}{(1 + Ax(t))(1 + By(t))} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - \frac{bx^2(t)y(t)}{1 + Ax^2(t)y(t)} - ex^2(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + \frac{dx^2(t)y(t)}{1 + Ax^2(t)y(t)} \end{cases}.$$

Динамика сообщества две жертвы – хищник описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений [7]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = a_1x_1(t) - b_1x_1(t)y(t) - e_{11}x_1^2(t) - e_{12}x_1(t)x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = a_2x_2(t) - b_2x_2(t)y(t) - e_{22}x_2^2(t) - e_{21}x_1(t)x_2(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + d_1x_1(t)y(t) + d_2x_2(t)y(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Особенностью этой модели является существование таких параметров, что при отсутствии хищника сосуществование двух видов невозможно.

В случае, если некоторое число особей жертвы (x_r) может найти то или иное убежище или укрытие, делающее их недостижимыми для хищника, то эта ситуация описывается системой уравнений [3]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - c(x(t) - x_r)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -ey(t) + c_1(x(t) - x_r)y(t) \end{cases}$$

В [3] рассматривается случай, когда x_r – постоянное число.

В работе [8] исследована устойчивость решения модели Вольтерра с убежищем, описываемой системой неавтономных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a(t)(x(t) - m_1x^2(t) - k_1(x(t) - \phi(x(t), y(t))))y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = b(t)y(t)(m_2(x(t) - \phi(x(t), y(t))) - 1) \end{cases}$$

где функция $\varphi(x(t), y(t))$ описывает убежище.

Рассмотрены случаи, когда $\varphi = k$, $\varphi = kx$, $\varphi = ky$.

В общем случае устойчивость этой модели исследована в [10].

2. Устойчивость модели Вольтерра с двумя жертвами и одним хищником

Исследуем устойчивость решения математических моделей, описывающих динамику взаимоотношения двух популяций жертв и одной популяции хищников

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= a_1 x_1(t) - b_1 x_1(t) y(t) - e_{11} x_1^2(t) - e_{12} x_1(t) x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_2 x_2(t) - b_2 x_2(t) y(t) - e_{22} x_2^2(t) - e_{21} x_1(t) x_2(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t) + d_1 x_1(t) y(t) + d_2 x_2(t) y(t).\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь $x_i(t)$ – численность популяции i -й жертвы, $y(t)$ – численность популяции хищников.

Наряду с моделью (2.1) представляет интерес рассмотрение модели, включающей слагаемое, учитывающее плотность популяции хищников:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= a_1 x_1(t) - b_1 x_1(t) y(t) - e_{11} x_1^2(t) - e_{12} x_1(t) x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_2 x_2(t) - b_2 x_2(t) y(t) - e_{22} x_2^2(t) - e_{21} x_1(t) x_2(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t) + d_1 x_1(t) y(t) + d_2 x_2(t) y(t) - d_{22} y^2(t).\end{aligned}\quad (2.2)$$

Кроме того, представляет интерес исследование моделей (2.1) с параметрами, зависящими от времени. Здесь могут быть рассмотрены периодические функции, характеризующие сезонные изменения окружающей среды.

Исследуем устойчивость решения системы уравнений (2.1). Исследование устойчивости проведем в пространстве R_3 векторов $X = (x_1, x_2, x_3)$ с нормой $\|X\| = \max_k |x_k|$. В этом случае логарифмиче-

ская норма матрицы $A = \{a_{kl}\}, k, l = 1, 2, 3$ равна

$$\Lambda(A) = \max_i \left(a_{ii} + \sum_{j, j \neq i} |a_{ij}| \right).$$

Обозначим через (x_1^*, x_2^*, y^*) нетривиальную неподвижную точку системы уравнений (2.1). Система уравнений (2.1) имеет также неподвижную точку $(0, 0, 0)$, но она не представляет экологического интереса.

Введем новые переменные $x_1(t) = x_1^* + u_1(t)$, $x_2(t) = x_2^* + u_2(t)$, $y(t) = y^* + u_3(t)$. Тогда система уравнений (2.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{du_1(t)}{dt} &= (a_1 - b_1 y^* - b_1 u_3(t) - 2e_{11} x_1^* - e_{11} u_1(t) - e_{12} x_2^* - e_{12} u_2(t)) u_1(t) - \\ &\quad - e_{12} x_1^* u_2(t) - b_1 x_1^* u_3(t), \\ \frac{du_2(t)}{dt} &= -e_{21} x_2^* u_1(t) + (a_2 - b_2 y^* - b_2 u_3(t) - 2e_{22} x_2^* - e_{21} x_1^* - e_{21} u_1(t) - \\ &\quad - e_{22} u_2(t)) u_2(t) - b_2 x_2^* u_3(t), \\ \frac{du_3(t)}{dt} &= d_1 y^* u_1(t) + d_2 y^* u_2(t) + \\ &\quad + (-c + d_1 x_1^* + d_1 u_1(t) + d_2 x_2^* + d_2 u_2(t)) u_3(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Вычислим логарифмическую норму матрицы $D(t)$, определенную левой частью системы уравнений (2.3).

Очевидно,

$$\begin{aligned} \Lambda(D(t)) &\leq \max \left\{ \left(a_1 - b_1 y^* + b_2 |u_3(t)| - 2e_{11} x_1^* + e_{11} |u_1(t)| - e_{12} x_2^* + e_{12} |u_2(t)| + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e_{12} x_1^* + b_1 x_1^* \right), \right. \\ &\quad \left(a_2 - b_2 y^* + b_2 |u_3(t)| - 2e_{22} x_2^* - e_{21} x_1^* + e_{21} |u_1(t)| + e_{22} |u_2(t)| + e_{21} x_2^* + b_2 x_2^* \right), \\ &\quad \left. (-c + d_1 x_1^* + d_1 |u_1(t)| + d_2 x_2^* + d_2 |u_2(t)| + d_1 y^* + d_2 y^*) \right\}. \end{aligned}$$

Пусть α – положительное вещественное число ($\alpha > 0$).

Покажем, что при выполнении условий

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 y^* - (2e_{11} - e_{12} - b_1) x_1^* &< -\alpha, \\ a_2 - b_2 y^* - (2e_{22} - e_{21} - b_2) x_2^* - e_{21} x_1^* &< -\alpha, \\ -c + d_1 x_1^* + d_2 x_2^* + (d_1 + d_2) y^* &< -\alpha \end{aligned} \quad (2.4)$$

тривиальное решение системы уравнений (2.3) устойчиво.

Доказательство проведем от противного. Пусть δ_0 ($\delta_0 > 0$) такое, что для всех $U(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ таких, что

$$\|U(t)\| \leq \delta_0 \quad \Lambda(D(t)) < 0.$$

Возьмем начальное приближение

$$U^*(0) = (u_1^*(0), u_2^*(0), u_3^*(0)) \quad (2.5)$$

такое, что $\|U^*(0)\| < \delta_0$. Покажем, что траектория задачи Коши (2.3), (2.5) не покидает шара $B(0, \delta_0)$. Предположим противное. Пусть в момент времени T траектория решения задачи Коши (2.3), (2.5) покидает шар $B(0, \delta_0)$ пространства \mathbb{R}_3 с центром в точке $O(0,0,0)$ и с радиусом δ_0 , проходя через точку $U(t) = (U_1(T), U_2(T), U_3(T))$.

Представим систему уравнений (2.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{du_1(t)}{dt} &= (a_1 - b_1 y^* - 2e_{11} x_1^* - e_{12} x_2^*) u_1(t) - e_{12} x_1^* u_2(t) - b_1 x_1^* u_3(t) + f_1(t), \\ \frac{du_2(t)}{dt} &= -e_{21} x_2^* u_1(t) + (a_2 - b_2 y^* - 2e_{22} x_2^* - e_{21} x_1^*) u_2(t) - b_2 x_2^* u_3(t) + f_2(t), \\ \frac{du_3(t)}{dt} &= d_1 y^* u_1(t) + d_2 y^* u_2(t) + (-c + d_1 x_1^* + d_2 x_2^* + d_2 u_2(t)) u_3(t) + f_3(t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где построение вектора $F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ очевидно.

Введем матрицу $B = \{b_{ij}\}$, где

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_1 - b_1 y^* - 2e_{11} x_1^* - e_{12} x_2^*, \quad b_{12} = -e_{12} x_1^*, \quad b_{13} = -b_1 x_1^*, \\ b_{21} &= -e_{21} x_2^*, \quad b_{22} = a_2 - b_2 y^* - 2e_{22} x_2^* - e_{21} x_1^*, \quad b_{23} = -b_2 x_2^*, \\ b_{31} &= d_1 y^*, \quad b_{32} = d_2 y^*, \quad b_{33} = -c + d_1 x_1^* + d_2 x_2^*. \end{aligned}$$

Тогда решение системы уравнений (2.6) (и, следовательно,(2.3)) при $t \geq T$ имеет вид $u(t) = e^{B(t-T)}u(T) + \int_T^t e^{B(t-s)}F(s)ds$.

Переходя к нормам, имеем

$$\|U(t)\| \leq e^{\Lambda(B)(t-T)} \|U(T)\| + \int_T^t e^{\Lambda(B)(t-s)} \|F(s)\| ds. \quad (2.7)$$

Так как $\Lambda(B) \leq -\alpha$, а функция $\|F(s)\|$ непрерывная, то существует интервал времени $[T, T + \Delta T]$, в течение которого $\|F(s)\| \leq \varepsilon \|U(s)\|$ и $\Lambda(B) + \varepsilon < 0$.

Применяя к (2.7) неравенство Гронуолла – Беллмана [9], имеем в промежутке времени $(T, T + \Delta T]$

$$\|U(t)\| \leq e^{(\Lambda(B) + \varepsilon)(t-T)} \|U(T)\|, \text{ т.е. } \|U(t)\| \leq \|U(T)\|.$$

Таким образом, получили противоречие и, тем самым, доказана устойчивость стационарного решения (x_1^*, x_2^*, y^*) системы (2.1) при выполнении условий (2.4).

Отметим, что условие $\Lambda(D(t)) < 0$ позволяет определить область притяжения неподвижной точки (x_1^*, x_2^*, y^*) .

Библиографический список

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1975.
2. Leslie P.H. Some future notes on the use of matrices in population mathematics // Biometrika. 1948. – V. 35. – P. 213 – 245.
3. Смит Дж. М. Модели в экологии. – М.: Мир, 1976. – 184 с.
4. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей популяций // Проблемы кибернетики. – Вып. 25. – М.: Наука, 1972. – С. 100 – 106.
5. Rosenzweig M.L., MacArthur R.H. Graphical representation and stability conditions of predator-prey interaction// Amer. Natur. – 1963. – V. 97. – P. 209 – 223.
6. Wangersky P.J., Cunningham W.J. Time lag in prey-predator population models // Ecology. – 1957. – V. 38. – P. 136 – 139.
7. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 182 с.

8. Ласунский А.В. Состояния равновесия неавтономной модели Лотки – Вольтерра при наличии убежища для жертвы // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 3. – С. 445 – 448.

9. Бойков И.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. – Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2008. – 244 с.

10. Бойков И.В., Гринченков Г.И. Устойчивость математических моделей экологии // V Международная научно-техническая конференция, 24-26 мая 2011 г. «Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем» : сборник статей. – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2011.

2. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

О ВЫЧИСЛЕНИИ НУЛЕЙ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

С.Д. Алгазин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского,
г. Москва, Россия

Введение. С появлением современных ЭВМ задача табулирования изменилась. Примером нового подхода к задаче табулирования служит справочник Ю.Люка (Yudeii L. Luke) [1]. В предисловии К.И. Бабенко к этой книге сказано: «... Раньше, во времена ручных вычислений, мы были, как правило, заинтересованы в том, чтобы иметь обширную таблицу, которая позволяла бы вычислять значение функции с помощью простейшей интерполяции. Теперь, используя при вычислениях ЭВМ, мы очень часто заинтересованы в том, чтобы иметь таблицу минимального объёма, даже если алгоритм восстановления функции достаточно сложен. Таким образом, возникает задача построения оптимальных по объёму таблиц». С 10 значащими цифрами нули функций Бесселя могут быть вычислены в пакете Maple 11, однако вычисление с большей точностью невозможно. В настоящей работе этот пробел восполняется. Возможно, вычислить несколько десятков первых нулей с 30 знаками после запятой.

1. О табулировании нулей функции Бесселя J_0 .

Рассматривается задача на собственные значения для нулевого уравнения Бесселя:

$$(xy')' + \lambda xy = 0, \quad x \in (0,1) \quad (1.1)$$

$$y(1)=0, \quad (1.2)$$

$$|y(0)| < \infty. \quad (1.3)$$

Решение этой задачи известно, и поэтому она удобна для проверки методики. Краевая задача (1.1) – (1.3) эквивалентна интегральному уравнению

$$y\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} G\left(\frac{x+1}{2}, \frac{\xi+1}{2}\right) \frac{\xi+1}{2} y\left(\frac{\xi+1}{2}\right) d\xi$$

$$G(x, \xi) = -\ln[(x + \xi + |\xi - x|) / 2].$$

Применим для функции $[(\zeta+1)/2]y[(\zeta+1)/2]$ интерполяционную формулу вида

$$(P_n f)(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) l_k(x) + R_n(x; f), \quad l_k(x) = \frac{T_n(x)}{(x - x_k) T_n'(x_k)}, \quad (1.4)$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x_k = \cos[(2k-1)\pi / 2n],$$

где $R_n(x; f)$ – погрешность интерполяции. Проводя вычисления, получаем

$$y_j = \lambda \sum_{k=1}^n B_{jk} y_k + r_n(x_j; y), \quad B_{jk} = B_k(x_j), \quad y_k = y(x_k), \quad k, j=1, 2, \dots, n, \quad (1.5)$$

где

$$B_k(x) = \frac{\xi_k + 1}{4} \int_{-1}^{+1} G\left(\frac{x+1}{2}, \frac{\xi+1}{2}\right) l_k(\xi) d\xi,$$

$$r_n(x, y) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} G\left(\frac{x+1}{2}, \frac{\xi+1}{2}\right) R_n\left(\xi; \left(\frac{\xi+1}{2}\right) y\right) d\xi.$$

Отбрасывая в (1.5) погрешность дискретизации, получаем приближенную задачу на собственные значения $\tilde{y} = \tilde{\lambda} \tilde{B} \tilde{y}$. Здесь \tilde{y} – вектор приближенных значений искомой собственной функции $y(x)$ в узлах сетки, $\tilde{\lambda}$ – приближенное собственное значение. Легко видеть (см., например, [2, с. 189]), что

$$\max_{|x| \leq 1} |r_n(x; y)| \leq c |\lambda| (1 + \omega_n) E_n(y),$$

где c – абсолютная постоянная, $(\omega_n = O(\ln(n)))$ – константа Лебега интерполяции, а $E_n(y)$ – наилучшее приближение функции y многочленом степени не выше $(n-1)$ в норме C . Заметим далее, что собствен-

ные функции задачи (1.1) – (1.3) целые, а поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n(y)} = 0$ [3, с. 254]), т. е. величина погрешности дискретизации очень быстро стремится к нулю. Возмущение, вносимое в собственные значения отбрасыванием погрешности дискретизации, будет оценено ниже. Здесь обсудим результаты численных расчетов. При $n = 5$ получим первое собственное значение с четырьмя знаками после запятой, а третье собственное значение – с одним знаком после запятой. При $n=20$ первое собственное значение вычисляется с 22 знаками после запятой, а 14-е собственное значение вычисляется с одним знаком после запятой. Последний расчет проводился на ЭВМ БЭСМ-6 с использованием двойной точности (длина мантииссы 80 бит). Время расчета 4 мин. 40 с. вместе с вычислением матрицы. В [4] опубликована программа *BESSEL*, по которой проводились эти расчеты, а также результаты расчета собственных функций краевой задачи (1.1) – (1.3).

Эти результаты получены автором в соавторстве с К.И. Бабенко давно, целью настоящей работы является их уточнение с использованием современных вычислительных средств. Сейчас появился транслятор с фортрана (Intel Visual Fortran 9.1) который позволяет вести расчёты с учетверённой точностью REAL*16. С использованием этого транслятора были проведены расчёты с числом точек $N = 3 - 23$, $N = 110$. Эти расчёты сравнивались с таблицей VI работы [5]. Проводились расчёты на сетках из $N = 3 - 23$ узлов. Ниже приведена погрешность определения первого собственного значения: 3) 0.11; 4) 0.53e-02; 5) 0.37e-03; 6) 0.54e-04; 7) 0.2e-05; 8) 0.23e-06; 9) 0.64e-08; 10) 0.68e-09; 11) 0.15e-10; 12) 0.14e-11; 13) 0.27e-13; 14) 0.23e-14; 15) 0.36e-16; 16) 0.28e-17; 17) 0.39e-19; 18) 0.28e-20; 19) 0.35e-22; 20) 0.23e-23; 21) 0.26e-25; 22) 0.15e-26; 23) 0.33e-28. По этой таблице подбирались аналитическая зависимость $\varepsilon = \varepsilon(N)$, получено: $\ln \varepsilon = a + bN + cN^2 + dN^3 + eN^4 + fN^5$; $a = 0.39307047$, $b = 0.58615539$, $c = 0.40323914$, $d = -0.599229377$, $e = 0.12421718$, $f = -0.0076898089$. Таким образом, скорость убывания погрешности экспоненциальная. Заметим, что метод конечных разностей и метод конечных элементов дают только степенное убывание погрешности.

2. Вычисление функций Бесселя целого индекса

Уравнение Бесселя имеет вид:

$$-(v''(r) + \frac{1}{r}v'(r)) + \left(\frac{k}{r}\right)^2 v(r) = \lambda v(r), \quad v(1) = 0, \quad |v(0)| < \infty. \quad (2.1)$$

Поэтому легко видеть, что матрица дискретной задачи (матрица у которой необходимо вычислить собственные значения) имеет вид: $\Lambda_0 = B^{-1}$, где B – матрица дискретного оператора (обратного к оператору Бес-

себя), построенная в [4]; $\Lambda_k = \Lambda_0 + k^2 R$, $k=1,2,\dots,n$; R – диагональная матрица с числами $(1/r_v)^2$, $r_v = (1 + \cos((2v-1)\pi/2m))/2$, $v = 1, 2, \dots, m$ на диагонали. В результате расчётов получено совпадение с 30 знаками после запятой с таблицей VI работы [5].

3. Нули функций Бесселя полуцелого индекса $J_{n+1/2}$

Приводились расчёты, аналогичные пункту 3. Получается, что квадратные корни из собственных значений кратны π . Получить больше 15 верных знаков после запятой не получается. Задача с полуцелым индексом более сложная для вычислений.

Библиографический список

1. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980.
2. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.
3. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. – М.: Гостехтеориздат, 1954.
4. Алгазин С.Д., Бабенко К.И., Косоруков А.Л. О численном решении задачи на собственные значения // Препринт ИПМ. – 1975. – № 108. – 57 с.
5. Таблицы нулей функции Бесселя // Библиотека математических таблиц. – Вып. 44. – ВЦ АН СССР, 1967. – 95 с.
6. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы классической математической физики. – М.: Диалог-МИФИ, 2010. – 240 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – 5-е изд. – 1977. – 742 с.
8. Уилкинсон, Райнш. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976. – 391 с.
9. Матричная алгебра и линейная алгебра: сборник научных программ на Фортране. – Вып. 2. – М.: Статистика, 1974.

СЖАТИЕ СИГНАЛОВ ВЕЙВЛЕТАМИ

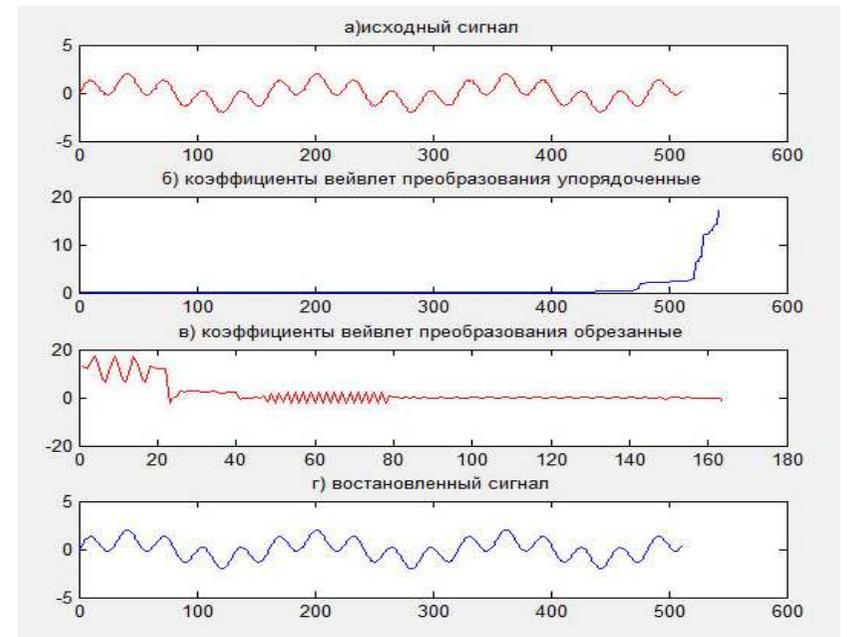
Ю.С. Семерич, В.Н. Новиков, Р.А. Верхов

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Из многочисленных опытов следует заметить, что вейвлет-преобразование позволяет сконцентрировать всю имеющуюся в сигнале информацию в немногих значимых коэффициентах. Эта особенность концентрации является основной предпосылкой для сжатия данных.

Для достижения высоких степеней сжатия преобразование должно обеспечивать максимально возможную локализацию энергии сигнала в частотной области. Это эквивалентно тому, что большая часть коэффициентов преобразования должна быть приравнена к нулю. Причем предполагается, что затемненные шумом структуры, лежащие в основе сигнала, сохраняются.

Рассмотрим следующий пример: возьмем сигнал, представленный функцией $f(x) = \sin(x) + \sin(5x)$ и отрезок $[0; 20]$. В соответствии с методикой, изложенной в [1] разбиваем его на 511 равных частей и вычисляем значения функции в узловых точках. Далее для исследования влияния шума внесем случайную погрешность, составляющую один процент от разности максимума и минимума рассматриваемой функции (рисунок, а). Для удобства результаты kol -шагового дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) $f^{kol}, d^{kol}, d^{kol-1}, \dots, d^1$ объединим в последовательность \tilde{f} .



ДВП функции $f(x) = \sin(x) + \sin(5x)$. Параметры $N=512$, вейвлет: симлет 4, порог фильтрации = 30%, $kol = 9$, число значащих разрядов под целую часть = 2, под дробную = 2

Проиллюстрируем локализацию энергии гистограммой \tilde{f} (рисунк, б). Гистограмма \tilde{f} вычисляются следующим образом: вычисляются коэффициенты ДВП и производится их упорядочивание.

Видно, что преобразование приводит к гистограмме, имеющей выраженный пик. Очевидно, «основное информационное содержание» исходного сигнала сосредоточено в сравнительно немногих существенных значениях.

Чтобы повысить степень локализации энергии также были осуществлены следующие преобразования: а) квантование; б) фильтрация.

При квантовании производится усечение дробной части.

При фильтрации выполняются следующие этапы:

1. Выбирается процентный показатель p ($0 < p < 100$).

2. Из гистограммы kol -шаговое ДВП \tilde{f} вычислялись ее усеченный вариант \tilde{f}^p и соответствующая реконструкция $f_{wavelet}^p$. Вычисления выполнялись следующим образом:

элементы последовательности \tilde{f} сортируются в порядке возрастания их абсолютных значений. Результирующую последовательность обозначим $l = \{l_k\}$. Затем выбирался такой предел \tilde{f}^{limit} , что абсолютные значения первых $(100-p)$ % от l элементов больше или равны \tilde{f}^{limit} ;

таким образом $\tilde{f}^p = \begin{cases} \tilde{f}, & |\tilde{f}| \geq \tilde{f}^{limit}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ То есть если абсолютное зна-

чение данного коэффициента преобразования входит в p процентов наибольших по абсолютному значению коэффициентов преобразования, оно сохраняется, иначе оно «удаляется», т.е. полагается равным нулю;

путем применения схемы реконструкции к $\tilde{f}^p = \{\tilde{f}_k^p\}$ получают значения $f_{wavelet}^p$.

Выясним, насколько сигнал $f_{wavelet}^p$ искажается по сравнению с оригиналом f . По подсчетам получаем относительную погрешность $\approx 0,63\%$, причем сравнение производится с не зашумленным сигналом, что говорит о том, что ДВП убирает шум, сохраняя структуру изначального сигнала.

Также важным вопросом является оценка степени сжатия. На данный момент нет точного алгоритма отбрасывания обнуляющихся коэффициентов последовательности \tilde{f}^p , однако в силу эмпирических опытов, остаются только p % коэффициентов, а остальные отбрасы-

ваются. При таком подходе получаем следующие коэффициенты сжатия: при квантовании $K_{сж} \approx 1,6$; при фильтрации $K_{сж} \approx 3,12$.

Приведенный пример может служить иллюстрацией основных механизмов, ответственных за потери качества сигнала при его сжатии с использованием ДВП.

Библиографический список

1. Шртак Г. Применение вейвлетов для ЦОС. – М.: Техносфера, 2007. – 192 с.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, ДЕМОГРАФИИ, СОЦИАЛЬНЫХ НАУК

АНАЛИЗ ПРОЕКТОВ НА СВЯЗАННОСТЬ

К.С. Петелин

Российский государственный университет
инновационных технологий и предпринимательства,
г. Пенза, Россия

Данная методика входит в основу метода многокритериального анализа решений. Она предполагает проведение работ по планированию и подготовке проекта к выполнению. В нее входят работы по процедуре синтеза приоритетов, вычисляемых на основе субъективных суждений экспертов, и анализ проектов на связанность.

После того, как определен порядок приоритета, проекты классифицируются по признаку связанности.

Проекты разделяются по признаку связанности на: 1) сильносвязанные проекты, 2) слабосвязанные проекты, 3) несвязанные.

Сильносвязанными проектами будут считаться те проекты, в процессе выполнения которых используются одинаковые виды ресурсов и которые имеют одного заказчика. Это проекты, относящиеся к основному виду деятельности предприятия. Рассматриваемые проекты выполняются в пределах одного предприятия, что обуславливает необходимость оптимального динамического распределения ресурсов между работами одновременно выполняемых проектов.

Слабосвязанные проекты выполняются для разных заказчиков, но используют одну номенклатуру ресурсов.

Несвязанными считаются те проекты, ресурсы и область деятельности в которых не пересекаются друг с другом, которые имеют разных за-

казчиков. Связаны они могут быть только финансовыми ресурсами в связи с тем, что выполняются на одном предприятии.

Каждый проект имеет определенный набор необходимых для него ресурсов. Такой набор ресурсов для проекта, например, R можно описать следующим образом:

$$R_i^k = \{r_{ij}\}, \quad (1)$$

где r_{ij} – наименование j ресурса i вида ресурса k проекта; R_i^k – множество ресурсов i вида k проекта [1].

Каждый R_i представляет собой множество экземпляров ресурса определенного вида. Общее количество ресурсов i вида, задействованных на сравниваемых проектах, определяется как мощность объединения множеств R_i :

$$N_i = M(\bigcup_{k=1}^l R_i^k), \quad (2)$$

где N – общее количество ресурсов i вида ресурса в сравниваемых проектах; R_i – множество ресурсов i вида; l – количество проектов.

Связанность между проектами A и B по каждому виду ресурсов будет определяться множеством C_i :

$$C_i = R_i^A. \quad (3)$$

При этом определяется пересечение множеств ресурсов проектов, т.е. количество общих ресурсов. Рассчитывается мощность множества C_i :

$$M(C_i) \in \begin{cases} 0, \text{проекты несвязанные;} \\ (0, N_i / 2], \text{проекты слабосвязанные;} \\ ((N_i / 2), N_i], \text{проекты сильносвязанные.} \end{cases} \quad (4)$$

По показателю связанности и приоритетности определяются необходимые условия для коррекции сетевых графиков.

Если проекты связаны, то может возникнуть задача перераспределения ресурсов. Для определения необходимости проведения этой процедуры в первую очередь рассматривается степень наложения ресурсов проектов во времени. Проверка наложения осуществляется по формуле оценки связанности проектов в момент времени t_j для ресурса r_{ij} :

$$r_{ij}^A(t_m) + r_{ij}^B(t_m) \leq r_{ij}^{\text{достаточное}}, \quad (5)$$

где $r_{ij}^A(t_m)$ – количество ресурса r_{ij} которое потребуется для выполнения проекта A в момент времени t_m ;

$r_{ij}^B(t_m)$ – количество ресурса r_{ij} , которое потребуется для выполнения проекта B в момент времени t_m ;

$r_{ij}^{\text{достаточное}}(t_m)$ – количество ресурса r_{ij} , доступное в момент времени t_m .

Если выполняется это неравенство, то перераспределения ресурсов не требуется.

Иначе если выполнение работ по обоим проектам требует участия одного и того же вида ресурса, то необходима процедура перераспределения ресурса в интересах более приоритетного проекта.

Таким образом, на предприятии могут существовать несвязанные проекты с высоким приоритетом и низким приоритетом, слабосвязанные проекты с высоким и низким приоритетом, сильносвязанные проекты с высоким и низким приоритетом [2].

Приведем пример анализа двух проектов на связанность.

Рассмотрим связанность двух проектов П1 и П2. В соответствии с формулами (1) –(5) рассчитаем степень взаимосвязи между данными проектами.

Для проекта П1 множества видов ресурсов, участвующие в исполнении работ проекта, в упрощенном виде состоят из следующих наименований ресурсов:

$R_1^{П1} = \{r_{11}, r_{13}\}$ – множество организационных ресурсов;

$R_2^{П1} = \{r_{21}, r_{22}, r_{23}\}$ – множество материальных ресурсов.

При этом коды ресурсов соответствуют обозначению ресурсов матриц ресурсов.

Для проекта П2 множества видов ресурсов будут иметь вид:

$R_1^{П2} = \{r_{12}, r_{13}\}$ – множество организационных ресурсов;

$R_2^{П2} = \{r_{21}, r_{22}\}$ – множество материальных ресурсов.

Общее количество наименований ресурсов 1-го вида и 2-го вида в соответствии с формулой равны соответственно:

$$N_1 = M\left(\bigcup_{k=1}^1 R_1^k\right) = M(R_1^A \cup R_1^B) = 3.$$

Связанность между проектами рассматривается отдельно по видам ресурсов. Т.о., связанность проектов по организационным ресурсам представляется следующим образом $C_1 = R_1^A \cap R_1^B = \{r_{13}\}$, по материальным ресурсам – $C_2 = R_2^A \cap R_2^B = \{r_{21}, r_{22}\}$.

Далее расчетов степени связанности проектов по видам ресурсов:

$M(C_1) = 1 \in (0; N_1 / 2]$ – слабосвязанные проекты по виду ресурса 1 ($N_1=3$).

$M(C_2) = 2 \in (N_1 / 2; N_1]$ – сильносвязанные проекты по виду ресурса 2 ($N_2=3$).

Необходимость перераспределения ресурса в момент времени t_j определяется неравенством (5). При этом r_{ij} достаточное определяется на предприятии в соответствии с существующими запасами соответствующего ресурса.

$r_{13}^A(t_1) + r_{13}^B(t_1) \leq r_{13}^{\text{достаточное}}(t_1)$ – проверка превышения доступного количества организационного ресурса r_{13} в момент времени t_1 .

$2+3 < 6$ – выполняется, перераспределение не требуется.

$r_{21}^A(t_1) + r_{21}^B(t_1) \leq r_{21}^{\text{достаточное}}(t_1)$ – проверка превышения доступного количества материального ресурса r_{22} в момент времени t_1 .

$2+1 \leq 1$ – не выполняется, требуется перераспределение данного вида ресурса.

$r_{22}^A(t_1) + r_{22}^B(t_1) \leq r_{22}^{\text{достаточное}}(t_1)$ – проверка превышения доступного количества материального ресурса r_{22} в момент времени t_1 .

$3+7 < 15$ – выполняется, перераспределение не требуется.

Имея приведенные результаты, специалист или эксперт может делать соответствующие выводы по дальнейшему ходу работ по планированию и подготовке проекта к выполнению.

Таким образом, данная методика может помочь организации или предприятию оперативно принимать решения по планированию и подготовке проектов к выполнению, что, в свою очередь, ведет к снижению материальных и нематериальных затрат.

Библиографический список

1. Ковалев В.В. Методы оценки инвестиционных проектов. – М.: Финансы и статистика, 2000.
2. Липсиц И. В., Коссов В. В. Инвестиционный проект: методы подготовки и анализа. – М.: Изд-во БЕК, 1999.

НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РИСКА ОСЛОЖНЕНИЙ У БОЛЬНЫХ С ГНОЙНО-ДЕСТРУКТИВНЫМИ ЗАБОЛЕВАНИЯМИ ЛЁГКИХ

А.А. Соломаха, К.А. Милова

Пензенский государственный университет,
Пензенский государственный педагогический университет
им. В.Г. Белинского,
г. Пенза, Россия

Необходимость развития методологии прогнозирования послеоперационных осложнений у больных с гнойно-деструктивными заболеваниями лёгких с использованием информационных технологий мотивируется се-

годня, увеличивающейся неудовлетворённостью врачей-клиницистов результатами лечения больных. Целью данной работы явилось создание нейросетевой системы прогнозирования осложнений в послеоперационном периоде у больных с гнойно-деструктивными заболеваниями лёгких. Наиболее распространенными осложнениями были: гнойно-воспалительные и кровотечения.

В настоящее время в хирургии все активнее применяются нейросетевые методы для получения прогнозных оценок состояния больных и исходов их лечения, однако практически не применяются в торакальной хирургии.

Для решения поставленной цели анализировались медико-статистические показатели отделения торакальной хирургии Пензенской областной клинической больницы им. Н.Н. Бурденко. В выборку были отобраны 417 историй болезни отделения торакальной хирургии областной клинической больницы. Из них 180 клинических наблюдений без осложнений, 237 осложнённых случаев. Выполнен экспертный анализ медицинской документации. Установлены следующие показатели, влияющие на исходы послеоперационного лечения больных с гнойно-деструктивными заболеваниями лёгких: длительность операции, объём оперативного вмешательства, объём гемоплазмотрансфузии, скорость оседания эритроцитов, возраст больного, количество гемоглобина и лейкоцитов, данные спирографии, а также клиническая оценка тяжести состояния больного врачом.

Данные были подвергнуты препроцессорной обработке – квантованию и кодированию. Эксперименты с нейронной сетью проводились в пакете Matlab.

Для препроцессорной обработки входных данных в нашем случае был применен метод квантования. Этот способ является одним из известных преобразований, использующихся при подготовке данных к нейросетевому анализу. Квантование подразумевает разбиение диапазона значений числового признака на заданное конечное число интервалов. Затем, полученным интервалам присваиваются номера, именуемые уровнями квантования. Каждое значение качественного признака заменяется номером интервала квантования, в который помещено данное значение. Квантование позволяет представлять и хранить данные в более компактном и защищённом от искажений виде и используется для уменьшения числа разнообразных значений признака, что в некоторых случаях позволяет сделать работу нейросетевой модели более эффективной. Таким образом квантование упростило алгоритм обучения нейронной сети.

Квантование первичных данных проведено для следующих показателей: общая сумма времени выполненных операций, общий объём перели-

тых трансфузионных сред и кровезаменителей, показатель скорости оседания эритроцитов, возраст, гемоглобин, количество лейкоцитов.

Из исходной выборки были сформированы обучающая и тестовая. Обучающая выборка содержала 300 наблюдений – 150 случаев без осложнений, 150 осложнённых случаев, тестовая выборка – 117 случаев.

Полученные в результате квантования и первичного кодирования качественных показателей данные были подвергнуты дальнейшему кодированию способом «битовой маски». Очевидно, что рассматриваемые качественные признаки являются упорядоченными (например, код клинической оценки состояния больного выражает тяжесть состояния – чем больше оценка, тем тяжелее состояние), поэтому каждый признак кодировался с накоплением числа сигналов с максимальным значением. Например, клиническое состояние пациента «0» кодировалось вектором [100], клиническое состояние «1» – вектором [110], а клиническое состояние «2» – вектором [111] соответственно.

Закодированные с помощью «битовой маски» данные, подавались на вход многослойной сигмоидальной нейронной сети. В качестве функции активации использовалась логарифмическая сигмоидальная функция активации.

Экспериментально подбиралось число слоев нейронной сети и количество нейронов в каждом слое. Лучший результат был достигнут на сети, содержащей 3 слоя: 2 нейрона в первом слое, 8 нейронов во втором слое, один нейрон в выходном слое нейросети. Установили, что дальнейшее усложнение структуры нейронной сети не давало улучшения результата.

Оценка качества работы нейросети оценивалась путём подсчёта правильно распознанных наблюдений. Достоверность работы нейронной сети составила 86,3%.

На основании результатов экспериментов была разработана нейросетевая система для прогнозирования риска возникновения гнойно-воспалительных осложнений у больных с гнойно-деструктивными заболеваниями лёгких по 9 критериям. При разработке модуля использовалась архитектура нейронной сети, построенной в ходе экспериментов в среде Matlab.

На экране при запуске приложения появляется форма, на которой пользователю предлагается выбрать, в выпадающих списках, значения параметров. Для получения прогноза необходимо нажать на кнопку «Прогноз». После нажатия кнопки «Прогноз» выводится сообщение «Без осложнений» или «Вероятно осложнение», «Сомнительный прогноз».

Таким образом, в результате экспериментов была предложена нейросетевая модель, позволяющая прогнозировать риск возникновения гнойно-воспалительных осложнений у хирургических больных с гнойно-деструктивными заболеваниями лёгких на основании 9 параметров с по-

грешностью не превышающей 13,7%. Для упрощения процедуры обучения нейросети было произведено квантование и кодирование исходных данных. На основании экспериментально подобранной архитектуры нейронной сети была реализована нейросетевая система прогнозирования риска гнойно-воспалительных осложнений в хирургии, имеющая государственную регистрацию в Роспатенте.

ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРСОНАЛОМ НА ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЯХ

Сориба Камара, soribacam@yahoo.fr

Тверской государственный технический университет,
г. Тверь, Россия

Чтобы эффективно управлять, необходимо знать механизм функционирования изучаемого процесса, всю систему факторов, вызывающих его изменение, а также средства воздействия на эти факторы. Следовательно, можно говорить об определенном механизме функционирования системы управления персоналом и об использовании различных инструментов воздействия на работника, т.е. об определенной технологии работы с кадрами.

В самом общем виде технология представляет собой приемы, навыки или услуги, применяемые для того, чтобы произвести определенные изменения в каком-либо материале. Социолог Чарльз Перроу списывает технологию как средство преобразования сырья – будь то люди, информация или физические материалы – в искомые продукты и услуги. Льюис Дейвис дает более широкое понятие технологии: Технология – это сочетание квалифицированных навыков, оборудования, инфраструктуры, инструментов и соответственно технических знаний, необходимых для осуществления желаемых преобразований в материале, информации или людях [1].

Управленческие воздействия на объект управления – персонал предприятия – могут быть направлены непосредственно на работника или на их совокупность как производственную ячейку, а также на факторы внутренней и внешней среды, в которой протекает процесс труда. В последнем случае можно говорить о косвенном воздействии на объект управления.

Различают несколько видов технологий: многозвенные, под которыми понимается серия взаимосвязанных задач, выполняемых последовательно; посреднические – как оказание услуг одними группами людей другим в решении конкретных задач; индивидуальные – с конкретизацией приемов, навыков и услуг применительно к отдельному работнику [1].

Примером реализации многозвенных технологий в управлении персоналом является принятие управленческих решений на каждом этапе

трудовой жизни работника на предприятии с присущими им спецификой, соответствующими задачами и методами управленческого воздействия.

Посреднические технологии используются в ходе взаимодействия кадровой службы с руководителями структурных подразделений предприятия по вопросам реализации кадровой политики, подбора кадров, их оценки и т.д.

Индивидуальные технологии в значительной мере ориентированы на управление поведением людей в ходе трудовой Деятельности и опираются на использование методов мотивации труда, социальной психологии и прежде всего методов регулирования межличностных отношений и т.д.

Управление, как отмечалось выше, связано с воздействием на факторы, действующие как в самой организации, так и за ее пределами. Формирование коллектива, его численный и профессиональный состав, качественные характеристики, связанные с ними ожидания работника и возможности их реализации, результаты деятельности коллектива зависят от таких внешних факторов, как место расположения предприятия, действующие законы и нормативные акты, экономическое состояние предприятия и экономики в целом. Не меньшее влияние оказывают факторы, действующие непосредственно на предприятии: применяемые техника и технология, организационный уровень производства и управления, состояние трудовой и технологической дисциплины, организация и условия труда, правила и нормативные акты внутреннего трудового распорядка, система вознаграждения за труд, мотивация трудовой деятельности, культура производства и взаимоотношений и т.п.

В управлении персоналом важно знать, какие цели могут быть достигнуты с помощью тех или иных средств воздействия, как и через что оно осуществляется. Арсенал применяемых здесь средств достаточно разнообразен: кадровое планирование; управление изменениями; оптимизация численности и структуры персонала, регулирование трудовых перемещений; выработка правил приема, расстановки и увольнения работников; структурирование работ, их новая компоновка, формирование нового содержания труда, должностных обязанностей; управление затратами на персонал как средство воздействия на развитие трудового потенциала работника; организация труда как средство создания обстановки, способствующей максимальной отдаче исполнителя в процессе работы; управление трудовой нагрузкой, оптимизация структуры рабочего времени; оценка и контроль деятельности; политика вознаграждения за труд, его высокие результаты; предоставление социальных услуг как средство мотивации, стабилизации коллектива; тарифные соглашения между администрацией и коллективом; социально-психологические методы; формирование корпоративной культуры и др.

Часть этих средств носит организационный характер, другие связаны с воздействием на работника с целью изменения его мотивации, поведения, мобилизации его внутренних возможностей. Важным инструментом управления является кадровое планирование, обеспечивающее целенаправленное развитие коллектива в соответствии с ресурсными возможностями и целями предприятия. Кадровое планирование представляет собой часть общей системы планирования, поэтому оно должно тесным образом увязываться с другими его видами. Через кадровое планирование оказывается воздействие на такие стороны кадровой работы, как:

- потребность в персонале;
- работа по найму и заполнению вакантных рабочих мест, включая подготовку кадров;
- высвобождение излишней рабочей силы;
- затраты на рабочую силу.

Любые изменения состояния рабочей силы должны осуществляться с учетом как движущих сил, так и сдерживающих. Среди последних можно выделить сопротивление со стороны работников как объекта управления воспринимать новое в связи с разной оценкой одних и тех же событий, фактов, наличием узкособственных интересов, неправильным пониманием целей организации и т.д.

Результативность преобразований зависит от методов их проведения. Стратегия управления изменениями может быть директивной, переговорной, нормативной, аналитической или ориентированной на действия [1].

В зависимости от ситуации наибольший эффект могут дать разъяснение, общение участие работников в реорганизационном процессе, помощь или поддержка (если люди боятся преобразований), переговоры и обеспечение согласия тех, кого преобразования касаются, на активное участие в них; явное или неявное принуждение и др.

Политика затрат на рабочую силу обуславливает подходы к привлечению рабочей силы, развитию собственного персонала, подготовке и переподготовке кадров, к разработке и реализации социальных программ.

Подбор нужной рабочей силы должен строиться на хорошо продуманной системе оценки деловых и личных качеств, а эффективная система оценки результатов труда обеспечивает взаимосвязь оплаты труда с его результативностью, или стимулирующую функцию заработной платы. Такой подход к построению оплаты труда, воспринимаемой работником как справедливой, благоприятно сказывается на отношении человека к своей работе, рабочему месту, предприятию.

Техническое обеспечение СУП организации составляет комплекс технических средств (КТС) – совокупность взаимосвязанных единым управлением и (или) автономных технических средств сбора, регистрации,

накопления, передачи, обработки, вывода и представления информации, а также средств оргтехники. Эффективность функционирования службы управления персоналом при использовании КТС должна обеспечиваться как за счет повышения производительности труда персонала службы, так и, что значительно важнее, за счет возможности использования экономико-математических методов решения задач управления на основе более полной и точной информации. В соответствии с последовательностью стадий технологического процесса преобразования информации все технические средства, которые могут быть использованы в службе управления персоналом, можно разделить на пять групп: сбора и регистрации, передачи, хранения, обработки и выдачи информации.

Средства сбора и регистрации информации: устройства подготовки данных, регистраторы информации, устройства сбора информации. Назначение этой группы технических средств – преобразование формы информации в вид, удобный для дистанционной передачи и дальнейшей обработки.

Средства передачи информации: системы телетайпной, телефонной, факсимильной связи предназначены для передачи информации в пространстве.

Средства хранения информации: внешние запоминающие устройства персональных компьютеров, картотеки. Предназначены для передачи информации во времени.

Средства обработки информации (средства вычислительной техники) составляют основу КТС службы управления персоналом. Они предназначены для преобразования исходных данных в результирующую информацию, необходимую для принятия управленческих решений.

Средства выдачи информации: печатающие устройства, знаковые индикаторы, видеотерминальные устройства (дисплеи), графопостроители и пр. Они предназначены для преобразования информации в вид, удобный для восприятия человеком.

Однако следует отметить, что приведенная выше классификация технических средств службы управления персоналом организации условна, так как многие типы технических средств выполняют комплекс функций, относящихся к разным классификационным группам.

Выбор типа, модели, марки технических средств, которые могут быть использованы в службе управления персоналом организации, осуществляется, как правило, по классификатору промышленной продукции (с учетом изменений), а также с помощью различных справочников и каталогов.

Расчет необходимого количества технических средств может осуществляться по формуле

$$N_i = \frac{A_i}{\Pi_i \cdot \Phi_{\Pi} \cdot K_{\Pi}}$$

где: N_i – количество единиц i -го технического средства;

A_i – необходимый объем работ, выполняемых службой управления персоналом с помощью i -го технического средства;

Π_i – плановая производительность i -го технического средства;

Φ_{Π} – плановый фонд рабочего времени;

K_{Π} – коэффициент использования планового фонда рабочего времени.

При расчете потребного количества ПК необходимо учитывать объем информации, поступающей на обработку, сложность решаемых задач, исходя из количества машинных операций на один показатель. Необходимое количество ПК можно рассчитать по формуле

$$N = \frac{K_a \sum_{i=1}^n q_i \cdot Q_i \cdot K_a}{V_{\text{вб}} \cdot K_{\text{ВП}} \cdot T_p \cdot K_{\text{н}}}$$

где N – количество персональных компьютеров;

K_a – коэффициент автоматизации программирования;

Q_i – количество машинных операций на один показатель, необходимый для решений i -й группы задач;

q_i – максимальный объем входной информации по i -й группе задач (в показателях);

K_m – дополнительный коэффициент, учитывающий увеличение времени при использовании программного контроля в ПК;

$V_{\text{вб}}$ – среднее быстродействие процессора;

$K_{\text{ВП}}$ – коэффициент понижения среднего быстродействия от обращения к внешним накопителям и устройствам ввода-вывода;

T_p – планируемое полезное месячное время работы ПК;

$K_{\text{н}}$ – коэффициент использования машинного времени выбранного ПК, учитывающий затраты времени на устранение неисправностей и на регламентируемые работы.

Эффективность управления персоналом, наиболее полная реализация поставленных целей во многом зависят от выбора вариантов построения самой системы управления персоналом предприятия, познания механизма его функционирования, выбора наиболее оптимальных технологий и методов работы с людьми.

Библиографический список

1. Маслов Е.В. Менеджмент/Управление персоналом предприятия. – 2010.

2. Шамхалов Ф.И. Американский менеджмент: теория и практика. – М., 1993.
3. Ларин М.В. Управление документацией и новые информационные технологии. – М., 2004
4. Даянц Д.Г. Кадровый менеджмент на горных предприятиях. – М., 2005
5. Денейко О.А. Комплексная рационализация управленческого аппарата. – М., 2007.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОИНТЕГРАЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ ИНФЛЯЦИИ В РОССИИ В ПОСТКРИЗИСНЫЙ ПЕРИОД

Д.Ю. Поползин

Алтайская государственная педагогическая академия,
г. Барнаул, Россия

Как известно, основные направления единой государственной денежно-кредитной политики в России, разрабатываемые Центральным банком и Правительством РФ, определяющие приоритетные цели в этой области макроэкономического регулирования, учитывают мнение представителей финансового сектора страны, в том числе и банковского сообщества.

К числу основных макроэкономических агрегированных показателей, изменение которых оказывает инфляционное давление на экономику, Банк России, на протяжении 2009–2011 годов, традиционно относит изменение мировых цен на энергоносители и продовольственные товары, численность занятого населения, объём производства, реальные располагаемые личные доходы, расходы населения на покупку товаров и услуг в реальном выражении, объём инвестиций в основной капитал, уровень спроса, оказывающий в свою очередь влияние на разрыв между потенциальным и фактическим выпусками, изменение условий заимствований на всех уровнях финансового рынка, изменение курса рубля по отношению к бивалютной корзине.

Вместе с тем ряд экспертных мнений, показывает, что причины инфляционных процессов могут выходить за рамки приводимых Центробанком факторов. Так М. Головнин, ведущий научный сотрудник Института экономики РАН, изучив основные теоретические подходы отечественных и зарубежных исследователей в области проведения денежно-кредитной политики, приходит к выводу, что одним из ключевых факторов динамики инфляции может быть растущее конкурентное давление на фирмы в мировой экономике [2].

Г. Фетисов, завкафедрой макроэкономического регулирования и планирования экономического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, при изучении связи динамики цен и антиинфляционной политики основной причиной и роста благосостояния россиян, и повышения уровня цен называет рост экспортных цен на сырьё [3]. О. Дмитриева, член Комитета по бюджету и налогам Государственной думы РФ, совместно с сотрудником Аппарата Государственной думы РФ Д. Ушаковым, в исследовании, посвящённом изучению причин формирования инфляции спроса и инфляции издержек в России, пришли к выводу, что инфляция спроса если и имеет место в России, то в незначительной степени [4].

Одним из методов измерения эффективности экономической политики является регрессионный анализ импульсного влияния трансмиссионного механизма на состояние экономической системы. Спецификация модели такого влияния формируется эмпирически, хотя набор переменных, характеризующих данный инструмент, определяет исследователь. Данный метод включает ошибку, размер которой иногда не позволяет продолжить исследование. Однако по институциональным факторам воздействия на экономику, он вполне успешно применяется в экономических исследованиях [1].

В связи с этим в проведённое исследование были включены следующие среднемесячные макроэкономические агрегированные показатели с 01.07.2009 до 01.01.2012: y – индекс потребительских цен на товары и услуги, % к декабрю 2008г. x_1 – цена на нефть сорта Brent, долларов США за баррель. x_2 – цена на природный газ, долларов США за 1млн Бте. x_3 – уровень безработицы (% от общего числа экономически активного населения). x_4 – объём инвестиций в основной капитал, млрд. руб. x_5 – оборот розничной торговли, млрд. руб. x_6 – динамика реальных располагаемых денежных доходов, в % к декабрю 2008 г. x_7 – ставка рефинансирования ЦБ, в %, подлежащих уплате ЦБ страны за кредиты, предоставленные кредитным организациям. x_8 – индекс выпуска по базовым видам экономической деятельности, в % к декабрю 2008г. Исчисляется на основе данных об изменении физического объёма производства продукции сельского хозяйства, добычи полезных ископаемых, обрабатывающих производств, производства и распределения электроэнергии, газа и воды, строительства, транспорта, розничной и оптовой торговли. x_9 – денежный агрегат M2, млрд. руб. x_{10} – номинальный курс рубля к бивалютной корзине в соотношении 0,55 доллар США:0,45 евро. x_{11} – Объём импорта, млн. долларов. Данные представлены на интернет-порталах Росстата, ЦБ РФ, холдинга «Финам», ФТС России.

Для проверки каждого из рассматриваемых временных рядов на стационарность были использованы расширенный тест Дики-Фуллера и тест Филипса-Перрона. Каждый из тестов был проведён согласно процедуре, предложенной Доладо, Дженкинсоном, и Сосвилла-Риверой. Выводы о характере нестационарности рассматриваемых предикторов, сделанные на основе результатов проведённых тестов, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Ряд	Y	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11
Тип	DS	DS	DS	DS	TS	TS	TS	DS	TS	TS	TS	TS

Сделанные выводы о характере нестационарности исходных временных рядов говорят о том, что между такими рядами Y , X_1 , X_2 , X_3 и X_7 возможна коинтеграция, однако, у коинтегрированных процессов есть одна особенность. Такие ряды представимы в виде системы векторной авторегрессии с ограничением на ряд коэффициентов (т.н. треугольная система Филипса). Отсюда уравнения системы могут быть представлены и в виде модели коррекции ошибками, из которой вытекает обязательное наличие причинности по Грэнджеру хотя бы в одном направлении. После проверки на предмет причинности по Грэнджеру выяснилось, что все приведенные переменные, кроме X_1 не проявляют данного свойства по отношению к уровню инфляции, что позволяет проводить проверку на наличие коинтеграционной связи лишь между рядами Y и X_1 .

Для проверки на наличие коинтеграции между переменными Y и X_1 был проведён тест Йохансена, который не только позволяет определить факт существования долговременной связи, но и указать на наиболее вероятный вид истинной модели зависимости рассматриваемых величин. Но прежде, чем применить процедуру Йохансена, следует определиться с порядком p векторной авторегрессии, которой следует векторный ряд. Для этой цели были использованы информационные критерии Акаике и Шварца среди моделей, прошедших диагностику остатков.

Согласно полученным результатам, оптимальный порядок VAR-представления равен 1 и 5. Таким образом, будет целесообразно провести тест Йохансена с длиной лага 1 и 5. При длине лага 1 в VAR-модели, между двумя переменными коинтеграционная связь отсутствует. Результаты проведенного теста для длины лага 5 говорят о наличии коинтеграции при всевозможных спецификациях спецификациях теста.

Для того чтобы определить, к какому из рассмотренных вариантов ближе истинная форма коинтеграции между переменными, были использованы критериям Акаике и Шварца. Результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2

Варианты спецификации теста Йохансена	Информационный критерий Акаике	Информационный критерий Шварца
В данных нет трендов. В СЕ не включается ни константа, ни тренд	7,365446	8,5435
В данных нет трендов. В СЕ включается константа	7,330927	8,558067
В данных есть линейный детерминированный тренд. В СЕ включается константа	7,205463	8,481688
В данных есть линейный детерминированный тренд. В СЕ включаются константа и линейный тренд	6,881159	8,206469
В данных есть детерминированный квадратичный тренд. В СЕ включаются константа и линейный тренд	6,713584	8,08798

Согласно рассчитанным показателям информационных критериев, наиболее близким к истинному процессу порождения данных является пятая спецификация. Таким образом, коинтегрирующий вектор имеет вид

$$\beta = (1; -96,84875; -0,446877; -0,143912)$$

и долговременное коинтегрирующее соотношение может быть записано как

$$Y = 96,84875 + 0,446877 * t + 0,143912 * X_1. \quad (1)$$

Параметр при переменной X_1 может интерпретироваться как воздействие на уровень инфляции изменения цены на нефть сорта Brent. Другими словами, при увеличении цены на нефть на 1 доллар за баррель, инфляция в долгосрочной перспективе возрастает на 0,144 процентных пункта по отношению к уровню декабря 2008 года. Очевидно, следует с осторожностью относиться к количественным характеристикам полученной модели, поскольку процесс проведения теста Йохансена, как и определение параметров коинтегрирующего вектора, очень чувствителен к размеру выборки и длине лага p в модели векторной авторегрессии и в терминах спецификации модели с распределёнными лагами.

Таким образом, в рамках проведённого исследования можно сделать вывод, что российская экономика, в том числе и такой её сегмент, как уровень цен на товары и услуги, остаётся тесно связанным с экспортными ценами на нефть и нефтепродукты, и происходившие изменения за период с июля 2009 г. по декабрь 2011, нашедшие отражение в рассмотренных макроэкономических агрегированных показателях не привели к появлению долгосрочной качественной связи с уровнем цен.

Библиографический список

1. Сухарев О.С. Эффективность экономической политики: методы оценки // Экономический анализ: теория и практика. – 2009. – №11.
2. Головнин М. Теоретические подходы к проведению денежно-кредитной политики в условиях финансовой глобализации // Вопросы экономики. – 2009. – №4. – С. 42 – 58.
3. Фетисов Г. Динамика цен и антиинфляционная политика в условиях «голландской болезни» // Вопросы экономики. – 2008. – №3. – С. 20 – 36.
4. Дмитриева О., Ушаков Д. Инфляция спроса и инфляция издержек: причины формирования и формы распространения // Вопросы экономики. – 2011. – №3. – С. 40 – 52.

БАЙЕСОВСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ АЛЬТЕРНАТИВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧИСЛОВОЙ, НЕТОЧНОЙ И НЕПОЛНОЙ ЭКСПЕРТНОЙ ИНФОРМАЦИИ*

С.В. Евстратчик¹, С.Н. Жук²

¹Санкт-Петербургский государственный университет,

²Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН,
г. Санкт-Петербург, Россия

Введение. Часто при оценке распределения значений финансово-экономических показателей исследователь сталкивается с отсутствием стационарности и независимости наблюдаемых временных рядов, что серьёзно препятствует успешному прогнозированию с использованием стандартных эконометрических методов ([3], [4]). Поэтому для предварительной оценки характера изучаемых распределений можно попытаться проанализировать байесовский анализ эмпирических данных, который опирается не только на историческую статистику, но и привлекает дополнительную экспертную информацию, которой может обладать исследователь. Поэтому данная тема является актуальной для исследований.

В рамках разработанной ранее байесовской модели оценки кусочно-постоянной плотности распределения, основанной на оценке параметров распределения Дирихле по нечисловой, неточной и неполной экспертной информации, рассматривается пример использования указанной модели для оценки и прогноза статистических характеристик приращений курса

* Работа частично поддержана проектом РФФИ № 12-01-00945.

швейцарского франка CHF относительно единицы XDR резервного платёжного средства SDR (Special Drawing Rights) Международного валютного фонда. Анализ проводится для частного случая оценки кусочно-постоянной плотности распределения, соответствующий тернарному разбиению диапазона возможных значений исследуемой случайной величины.

Цель работы – сравнение двух методов получения прогноза статистических характеристик временного ряда. В качестве альтернативного метода используется классический эконометрический метод: построение модели ARIMA и прогноза с помощью метода экспоненциального сглаживания.

Использование байесовского метода оценки вероятностей альтернатив по нечисловой неточной и неполной экспертной информации. Изложенная в [1] модель применяется для оценки и прогноза статистических характеристик приращений курса швейцарского франка (CHF) относительно счётной денежной единицы (XDR) резервного платёжного средства SDR (Special Drawing Rights) Международного валютного фонда (МВФ). Данные взяты с сайта [2]. При этом рассматривается частный случай оценки кусочно-постоянной плотности распределения, соответствующий тернарному разбиению диапазона возможных значений исследуемой случайной величины.

Построение ARIMA-модели и прогноза с помощью экспоненциального сглаживания. Для исследуемых трёх коротких временных рядов была построена модель ARIMA(p, k, q). С помощью информационных критериев Akaike и Schwartz был осуществлён подбор модели для каждого из случаев. Далее, используя метод экспоненциального сглаживания, были построены прогнозы статистических характеристик приращений курса швейцарского франка (CHF) относительно счётной денежной единицы (XDR) резервного платёжного средства SDR (Special Drawing Rights) Международного валютного фонда (МВФ).

Заключение. В работе был проведён анализ выбранных коротких временных рядов приращений курса швейцарского франка CHF относительно счётной денежной единицы XDR резервного платёжного средства SDR (Special Drawing Rights) Международного валютного фонда (МВФ) изложенным ранее методом рандомизированных вероятностей для частного случая оценки кусочно-постоянной плотности распределения, соответствующий тернарному разбиению диапазона возможных значений исследуемой случайной величины. Был получен прогноз статистических характеристик выбранных трёх коротких временных рядов с(CHF, XDR) с помощью Байесовского метода и с помощью построения ARIMA – модели и получения прогноза с помощью метода экспоненциального сглаживания. Был проведён сравнительный анализ полученных результатов, в результа-

те которого, было выявлено, что байесовский анализ более точно даёт прогноз статистических характеристик, чем классический эконометрический метод – построение ARIMA-модели и получения прогноза с помощью метода экспоненциального сглаживания.

Библиографический список

1. Колесов Д.Н., Колодко Д.В., Хованов Н.В. Байесовская оценка распределения значений финансово-экономических показателей: теория и возможные приложения // Применение математики в экономике : сборник статей. – Вып. 19. – СПб., 2012.
2. Currency converter and historical exchange rates since 1990: <http://www.fxtop.com>.
3. Айвазян С.А., Иванова С.С. Эконометрика. Краткий курс : учеб. пособие. – М.: Маркет ДС, 2007. – 104 с.
4. Бородич С.А. Вводный курс эконометрики : учеб. пособие. – Мн.: БГУ, 2000. – 354 с
5. Страница Eviews. URL: <http://www.eviews.com>. (Доступ 04.05.2012.)

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНО ЗНАЧИМОГО ПОВЕДЕНИЯ ПО ДАННЫМ О ПОСЛЕДНИХ ЭПИЗОДАХ

А.В. Суворова, А.Е. Пашенко

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН,
г. Санкт-Петербург, Россия

Задачи оценивания интенсивности социально-значимого поведения респондентов возникают во многих отраслях социологических, психологических, маркетинговых исследований. Например, в эпидемиологии важен вопрос оценки риска передачи или приобретения неизлечимых инфекций (например, ВИЧ), а для этого необходимо знать интенсивность рискованного поведения респондентов. Выделение групп потребителей, существенно различающихся интенсивностью потребления продуктов, товаров или услуг, в маркетинговых исследованиях позволяет сосредоточить усилия на тех группах, которые многочисленны, но товар потребляют неинтенсивно.

Отметим, что наиболее доступными исходными данными для анализа поведения выступают самоотчеты респондентов о его поведении, то есть ответы в анкете на блок вопросов или результаты проведения интервью. На данный момент разработаны и применяются в опросах респондентов два подхода к оцениванию интенсивности поведения: прямые вопросы

и Лайкерт-шкалы – каждый из которых имеет недостатки [1, 2]. Одной из возможных альтернатив представляется опрос респондента об одном или нескольких последних эпизодах его поведения. Заметим, что ответы респондента на такие вопросы о последних эпизодах характеризуются стабильностью воспроизведения. Однако ограниченное число и неточность, нечеткость естественно-языковых формулировок ответов не позволяют напрямую использовать известные методы из теории массового обслуживания для оценки интенсивности поведения, поэтому возникает необходимость в предложении новых математических моделей.

Поведение рассматривается как случайный процесс некоторого класса. При этом встают вопросы о том, как меняются параметры этого процесса, как осуществляется обработка неполных исходных данных.

Отметим, что в результате интервью становятся известными сведения о нескольких (в рассматриваемом случае трех) последних эпизодах поведения. Серия эпизодов рассматривается как пуассоновский случайный процесс с основным уравнением [1, 2]

$$\text{Pr}(t, k, \lambda) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где t – промежуток времени наблюдения за поведением респондента; k – число эпизодов рассматриваемого поведения, случившихся в этот промежуток; λ – интенсивность поведения; $\text{Pr}(t, k, \lambda)$ – вероятность того, что за промежуток времени наблюдения t при поведении с интенсивностью λ случится ровно k эпизодов указанного поведения. Длины временных интервалов между соседними эпизодами распределены по экспоненциальному закону. Цель исследований – определить или оценить величину параметра λ , характеризующего интенсивность участия респондента в поведении определенного вида.

Применим метод максимального правдоподобия [3] к основному уравнению пуассоновского процесса при вышеуказанных данных, чтобы найти соответствующую оценку λ

$$g(\lambda) = \frac{T\lambda^k}{k!} e^{-T\lambda}, \quad \frac{\partial \log(g(\lambda))}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{k}{T},$$

где T – временной интервал между моментом интервью и самым отдаленным, k -м эпизодом.

Рассмотренный подход, несмотря на логичные и правомерные мотивирующие соображения, имеет ряд недостатков из-за некоторых оставленных без внимания деталей.

Во-первых, временной интервал между последним эпизодом поведения и моментом интервью тоже рассматривается как интервал между эпи-

зодами, тем самым мы делаем неявное предположение, что в момент интервью также был следующий эпизод. Варианты решения проблемы включают как исключение этого последнего эпизода из анализа [4], так и введение распределения особого вида (принадлежащего к классу beta-prime распределений) для учета такого интервала [5]. Второй способ предпочтителен, так как позволяет не потерять имеющиеся данные.

Во-вторых, ответы на вопросы об эпизодах поведения поступают на естественном языке, т.е. являются в значительной степени нечеткими и неполными. Отметим, что респонденты используют в своих высказываниях разные единицы измерения: часы, дни, недели, месяцы, полугод, года. Причем использованная единица измерения несет в себе информацию о точности измерения. Поясним это на примере двух, на первый взгляд равнозначных, высказываний: «семь дней назад» и «неделю назад». Когда респондент использует формулировку «семь дней назад», это свидетельствует о его уверенности в том, что событие произошло именно семь дней назад. В то время как «неделю назад» — это может быть и пять, и восемь дней назад. Для учета указанных особенностей каждый ответ рассматривается не как точка на временной оси, а как интервал, длина которого зависит от единицы измерения. Значение каждого ответа рассматривается, таким образом, не как константа, а как случайная величина с заранее заданным распределением [1, 6], и в дальнейших вычислениях используется оценка этой случайной величины.

Таким образом, предложенный подход позволяет оценить интенсивность социально-значимого поведения респондентов по их самоотчетам об эпизодах такого поведения.

Библиографический список

1. Суворова А.В., Тулупьев А.Л., Пашенко А.Е., Тулупьева Т.В., Красносельских Т.В. Анализ гранулярных данных и знаний в задачах исследования социально значимых видов поведения // Компьютерные инструменты в образовании. – 2010. – №4. – С. 30 – 38.
2. Тулупьева Т.В., Пашенко А.Е., Тулупьев А.Л., Красносельских Т.В., Казакова О.С. Модели ВИЧ-рискованного поведения в контексте психологической защиты и других адаптивных стилей. – СПб.: Наука, 2008. – 140 с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
4. Лавренов А.В., Суворова А.В., Пашенко А.Е., Тулупьев А.Л. Особенности обработки данных и знаний об эпизодах социально значимого поведения в окрестности интервью // Труды СПИИРАН. – 2010. – Вып. 15. – С. 246 – 262.

5. Зельтерман Д., Тулупьев А.Л., Суворова А.В., Пашенко А.Е., Му-
сина В.Ф., Тулупьева Т.В., Красносельских Т.В., Гро Л., Хаймер Р. Обра-
ботка систематической ошибки, связанной с длиной временных интервалов
между интервью и последним эпизодом в гамма-пауссоновской моде-
ли поведения // Труды СПИИРАН. – 2011. – Вып. 16. – С. 160 – 185.

6. Хованов Н.В. Анализ и синтез показателей при информационном
дефиците. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996. – 196 с.

СИНТЕЗ АГРЕГИРОВАННЫХ ОЦЕНОК ВЕРОЯТНОСТИ РЕАКЦИЙ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ В ОТВЕТ НА СОЦИОИНЖЕНЕРНОЕ АТАКУЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ*

А.А. Азаров, О.Ю. Ванюшичева

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН,
Санкт-Петербургский государственный университет,
г. Санкт-Петербург, Россия

Комплексные корпоративные информационные системы в настоящее время получают все большее распространение в современном мире. Разработка, поддержка и защита подобных систем занимает значительное количество времени и ресурсов, а также требует участия высококвалифицированного персонала. Информация, хранимая в таких информационных системах, имеет огромную ценность для компаний-владельцев систем, поэтому значительные усилия затрачиваются на построение системы защиты таких систем от различных угроз безопасности. Новейшие системы безопасности могут защитить информационные системы от большинства программно-технических атак, но, в то же время, большинство таких систем не защищено от инсайдерских атак. Таким образом, злоумышленники, обладающие навыками социо-инженеров, с легкостью могут повлиять на пользователей информационных систем с целью получения именно той информации, которая им нужна. Для того чтобы избежать утечек такого рода, необходимо научиться оценивать вероятность последствий проявления (реализации) уязвимости пользователей информационных систем.

Для качественного и количественного анализа защищенности информационных систем необходимо построить ряд формальных информационных моделей. Информационная система как модель IS {informational_system}, в которую включены ее общие свойства: когда и кем создана, название данной системы. Аппаратно-техническая со-

* Исследования, в рамках которых получены публикуемые результаты, частично поддержаны РФФИ, проект № 10-01-00640-а, СПбГУ, проект № 6.38.72.2011.

ставляющая информационной системы это двойка COMP {computers, links}, где computers включает в себя, какие именно устройства и программное обеспечение содержатся в данной системе, в то время как links отображает прохождение связей между различными устройствами системы. Контролируемые зоны системы это модель CA {control_area}. Данная модель была создана с целью разграничения зон доступа к аппаратно-технической составляющей системы. Подобные зоны, как правило, совпадают и с контролируемыми зонами предприятия в целом. Следующим элементом информационной системы является набор критических документов. Каждый набор документов это двойка DOC {location, value}, где location это привязка объекта к определенному устройству или придание ему общесетевого статуса, а value – оценка критичности документа. Модель пользователей US это тройка {id, general_inforamation, list_of_vulnerabilities}, где general_information включает в себя различные формальные атрибуты пользователей, такие как: ФИО, должность. List_of_vulnerabilities это фрагмент профиля уязвимостей пользователя, состоящий из уязвимостей: 1) техническая неосмотрительность; 2) слабый пароль; 3) техническая халатность и установка на получение личной выгоды; 4) техническая неопытность; 5) техническая безграмотность. Модель групп пользователей US_GR это двойка {user's_profiles, user's_access}, где user's_profiles это права пользователей на совершение тех или иных действий, а user's_access – уровень доступа пользователей к различным аппаратно-техническим составляющим информационной системы.

Формально, в общем виде, атака злоумышленника на пользователей Θ представляет собой машину состояний

$$\Theta = \left\{ S^{\Theta}, A_{1..n}, B_{1..n}, p_{i,j}^1(B_i | A_j), doc^{\Theta}, p_k \left(doc_k^{\Theta} | p_{i,j}^1(B_i | A_j) \right), US_{1..n}, tr \right\},$$

где S^{Θ} – множество состояний, отображающих текущее положение в системе: какие действия совершены злоумышленников, против каких пользователей, какие действия пользователи осуществили в ответ и какие документы злоумышленник добыл. $A_{1..n}$ – множество совершенных злоумышленником действий. $B_{1..n}$ – множество ответных реакций пользователя. $p_{i,j}^1(B_i | A_j)$ – вероятность совершения пользователем US_i ответного действия B_i на атакующее действие злоумышленника A_j . Данная вероятность находится с помощью экспертно полученной шкалы на основе профиля уязвимостей пользователя. doc^{Θ} – набор доступных злоумышленнику критических документов в текущем состоя-

нии атаки. $P_k \left(\text{doc}_k^{\ominus} \mid P_{i,j}^1(B_i | A_j) \right)$ – вероятность того, что документ doc_k^{\ominus} станет доступен злоумышленнику в случае атаки злоумышленника на пользователя US_i . $US_{1..n}$ – множество уже атакованных злоумышленником пользователей. tr – функция перехода из состояния в состояние $tr: S^{\ominus} \rightarrow S^{\ominus}$. При вызове данной функции происходит элементарное атакующее действие злоумышленника A_j на пользователя US_i , которое ведет к ответной реакции B_i и соответствующему пересчету всех вероятностей данной системы.

Следующим этапом планируется ввести расчет ущерба, нанесенного системе, на основе вероятностей получения злоумышленником доступа к критичным документам $P_k \left(\text{doc}_k^{\ominus} \mid P_{i,j}^1(B_i | A_j) \right)$. Такая вероятностная оценка позволяет не только предположить какой ущерб будет нанесен компании в том или ином случае, но и понять, какие именно пользователи подвержены тем или иным видам социоинженерных атак. Такие показатели можно найти с помощью $P_{i,j}^1(B_i | A_j)$, предполагается, что чем выше вероятность, тем выше проявление уязвимости пользователя и, наконец, тем больше пользователь подвержен A_j виду социоинженерных атак.

Библиографический список

1. Тулупьев А.Л., Азаров А.А., Тулупьева Т.В., Пашенко А.Е., Степашкин М.В. Социально-психологические факторы, влияющие на степень уязвимости пользователей автоматизированных информационных систем с точки зрения социоинженерных атак // Труды СПИИРАН. – 2010. – Вып. 1 (12). – С. 200 – 214.
2. Тулупьев А.Л., Азаров А.А., Пашенко А.Е. Информационные модели компонент комплекса «Информационная система – персонал», находящегося под угрозой социоинженерных атак // Труды СПИИРАН. – 2010. – Вып. 3 (14). – С. 50 – 57.
3. Тулупьев А.Л., Азаров А.А., Тулупьева Т.В., Пашенко А.Е. Визуальный инструментарий для построения информационных моделей комплекса «информационная система – персонал», использующихся в имитации социоинженерных атак // Труды СПИИРАН. – 2010. – Вып. 4 (15). – С. 231 – 245.
4. Азаров А.А. Анализ защищенности информационных систем от социоинженерных атак компенсационного типа в отношении пользователей // VII Санкт-Петербургская межрегиональная конференция «Информационная безопасность регионов России (ИБРР-2011)»

(Санкт-Петербург, 26–28 октября 2011 г.). – СПб.: СПОИСУ, 2011. – С. 160.

5. Тулупьева Т.В., Тулупьев А.Л., Азаров А.А., Пашенко А.Е. Психологическая защита как фактор уязвимости пользователя в контексте социоинженерных атак // Труды СПИИРАН. – 2011. – Вып. 18. – С. 74–92.

6. Ванюшичева О.Ю., Тулупьева Т.В., Пашенко А.Е., Тулупьев А.Л., Азаров А.А. Количественные измерения поведенческих проявлений уязвимостей пользователя, ассоциированных с социоинженерными атаками // Труды СПИИРАН. – 2011. – Вып. 19. – С. 34 – 47.

7. Степашкин М.В. Модели и методика анализа защищенности компьютерных сетей на основе построения деревьев атак : дис. ... канд. техн. наук. – СПб.: СПИИРАН, 2002. – 196 с.

АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ОЦЕНКА ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ХЕРСТА НА МАЛЫХ ВЫБОРКАХ ДАННЫХ РЫНКА

Ю.Ю. Егорова

Пензенский филиал Российского государственного университета
инновационных технологий и предпринимательства,
г. Пенза, Россия

С легкой руки Бенуа Мандельброта [1, 2, 3] расчет показателя Херста или R/S анализ стал широко использоваться при идентификации состояния рынка. Практика показала, что показатель Хэрста оказался удобен не только для описания рынка (взаимодействия множества людей), но и для описания состояний одного человека (статистического описания личных биометрических данных). Эффективность этого показателя влечет за собой его широкое применение для практических целей, однако при этом приходится сталкиваться с необходимостью использования больших размеров представительной выборки исходных данных.

Суть проблемы состоит в том, что для R/S анализа желательно иметь выборку из нескольких тысяч отсчетов. Например, для R/S анализа колебаниям индекса S&P500 в работе [2] используются несколько тысяч ежедневных показателей индекса за несколько лет. Если мы попытаемся сократить размеры выборки до нескольких десятков исходных данных, то вычисления теряют устойчивость.

При R/S анализе данных осуществлялось классическое накапливание центрированных параметров:

$$V_i = \sum_{i=0}^N (v_i - E(v)), \quad (1)$$

где v_i – значения контролируемого параметра; $E(v)$ – математическое ожидание контролируемого параметра.

Далее вычислялся нормированный размах накопленных значений:

$$R/S = \frac{\max(V_i) - \min(V_i)}{\sigma(v)}, \quad (2)$$

где $\sigma(v)$ – среднеквадратическое отклонение контролируемого параметра.

Показатель Херста вычислялся следующим образом:

$$H = \frac{\log(R/S)}{\log(N) - \log(a)}, \quad (3)$$

где N – число отсчетов в окне наблюдения данных; a – константа.

Естественно, что расчеты по цепочке вычислений (1), (2), (3) оказываются сильно зависимыми как от значения показателя Херста, так и от размеров выборки исходных данных – N . На рис. 1 даны графики увеличения ошибок оценки показателя Херста при снижении размеров выборки исходных данных.

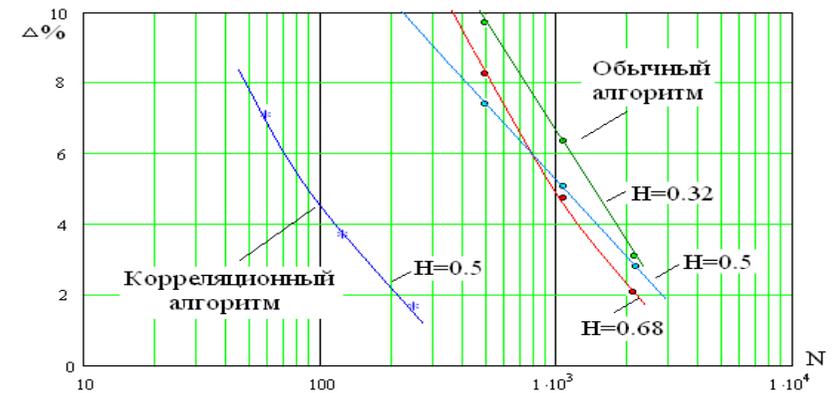


Рис. 1. Влияние размеров выборки из N исходных данных на относительную ошибку $\Delta\%$ при оценке показателей Херста двумя разными способами

Из рис. 1 видно, что относительная 10% ошибка оказывается минимальна для «белого шума», имеющего показатель Херста $H = 0.5$.

Для обеспечения такой же ошибки для шума с другим значением показателя Хэрста $H \neq 0,5$ требуются гораздо большие объемы исходных данных. Приведенные на рисунке данные были получены средствами имитационного моделирования.

Обычно практика моделирования псевдослучайных процессов [2] сводится к использованию генератора «белого шума» и подключенного к его выходу линейного динамического звена с перестраиваемой импульсной переходной функцией – $w(\tau)$ (см. блок-схему рис. 2). Если подбирать время памяти и форму импульсной переходной функции автоматом подбора (блок 3 рис. 2), то удастся менять показатель Хэрста выходного псевдослучайного процесса в пределах от 0 до 1.

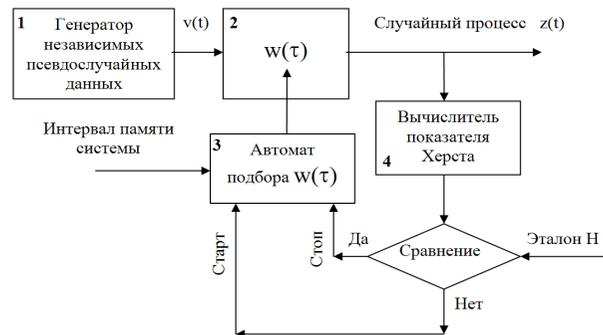


Рис. 2. Блок-схема имитационного моделирования случайных процессов

Так как по блок-схеме рис. 2 можно получить как угодно большие размеры выходных данных проблем с точностью подбора нужной импульсной переходной функцией обычно не возникает. Если блок 4 вычисления показателя Хэрста использует порядка 100000 отсчетов, ошибкой из-за конечного размера исходных данных можно пренебречь.

Очевидно, что большие размеры выборки исходных данных при вычислении показателя Хэрста связаны с тем, что необходимо осуществлять накапливание данных (1) для того, что бы далее достоверно оценить размах (2). Если интервал накапливания используемый в (1) слишком мал, то ошибка оценки размаха (2) может быть как угодно велика. В итоге, пользуясь для вычисления показателя Хэрста выражениями (1), (2), (3) мы не можем применять малые выборки исходных данных рынка или биометрии.

Для того чтобы снизить размеры представительной выборки исходных данных в место выражения (2), необходимо использовать иной тип вычислений, менее чувствительный к размерам выборки исходных

данных. Одним из решений этой задачи является использование автокорреляционных функций наблюдаемых данных [6]. Например, в частном случае наблюдения значения показателя Херста $H \approx 0.5$ для «белого шума» импульсная переходная функция $w(\tau)$ линейного блока 2 (рис. 2) должна быть вырождена:

$$\begin{cases} w(\tau) = 1 & \text{при } \tau = 0; \\ w(\tau) = 0 & \text{при } \tau \neq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Совершенно так же должна вести себя и автокорреляционная функция сигнала $z(t)$, моделируемого генератором (блок-схема рис. 2):

$$\begin{cases} r_{zz}(\tau) = 1 & \text{при } \tau = 0; \\ r_{zz}(\tau) = 0 & \text{при } \tau \neq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Соотношение (5) обосновывает возможность замены для «белого шума» импульсной переходной функции в схеме моделирования рис. 2 на вычисленное значение автокорреляционной функции наблюдаемых данных. В этом частном случае мы можем воспользоваться вычислением автокорреляционной функции на малой выборке из 64, 128, 256 данных и затем, вычисленную функцию $r_{zz}(\tau)$ использовать в качестве переходной функции блока 2 схемы моделирования. Далее мы можем воспроизвести по схеме моделирования рис. 2 очень большую выборку данных для последующего вычисления показателя Херста по формулам (1), (2), (3). Практика показывает, что моделирования порядка 100 000 псевдослучайных данных оказывается достаточно, чтобы ошибкой из-за ограниченности выборки исходных данных можно было пренебречь.

В левой части рис. 1 дан график наиболее вероятных значений погрешностей при вычислении показателя Херста корреляционным методом. Сравнивая графики правой и левой части рис. 1 можно сделать вывод о том, что корреляционный метод оценки показателя Херста гораздо менее чувствителен к размерам представительной выборки исходных данных. При переходе к корреляционному алгоритму оценки показателя Херста удастся снизить размеры выборки исходных данных примерно в 10 раз при тех же значениях погрешности.

К сожалению, прямая подстановка автокорреляционных функций исходных данных вместо импульсной переходной функции блок-2 блок-схемы рисунка 2 не всегда возможна. Далее будем рассматривать случайный процесс $z(t)$, не являющийся «белым шумом», как отклик некоторого линейного динамического звена с импульсной переходной функцией $w(\tau)$ на идеальный белый шум $v(t)$:

$$z(t) = \int_0^T v(t) \cdot w(t - \tau) \cdot d\tau = v(t) \otimes w(t), \quad (6)$$

где T – время памяти линейного динамического звена, \otimes – операция свертки.

Если входное воздействие $v(t)$ действительно является «белым шумом», то автокорреляционная функция исследуемого сигнала $r_{zz}(\tau)$ будет совпадать с автосверткой импульсной переходной функции:

$$r_{zz}(\tau) = \int_0^{+2T} w(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot dt = w(\tau) \otimes w(\tau). \quad (7)$$

При решении интегрального уравнения (7) во временной или в частотной области [4, 5] мы всегда можем перейти от конкретной автокорреляционной функции $r_{zz}(\tau)$ к эквивалентной ей импульсной переходной функции $w(\tau)$. То есть переход от автокорреляционной функции, вычисленной на малой выборке исходных данных к эквивалентной импульсной переходной функции возможен при любых значениях исходных данных.

Для всех импульсных переходных функций $w(\tau)$ одного знака, их автокорреляционная функция $r_{zz}(\tau)$ должна быть положительной и монотонно убывающей. Если импульсная переходная функция блока-2 знакопеременна, то и эквивалентная автокорреляционная функция так же должна быть знакопеременной. Следует подчеркнуть, что однозначная связь показателя Херста с формой импульсной переходной функции и формой автокорреляционной функции существует только для линейных динамических звеньев с одинаковым интервалом памяти (для случайных процессов с одинаковой памятью). Для линейных звеньев с разным интервалом памяти один и тот же показатель Херста будет соответствовать разным формам импульсных переходных функций и функций автокорреляции. Все выше сказанное легко проверяется средствами имитационного моделирования.

При одинаковом интервале памяти показатель Херста оказывается тем меньше, чем существеннее знакопеременная составляющая в импульсной переходной функции или автокорреляционной функции. Проведенные численные эксперименты показали, что по форме переходной функции (автокорреляционной функции) можно без вычислений достаточно точно указать значение показателя Херста, вообще не прибегая к имитационному моделированию промежуточных псевдослучайных данных. Так переходные функции и автокорреляционные

функции с постоянным знаком всегда дают большие значение показателя Херста в интервале $1 > H > 0.5$. Появление эффекта изменения знака всегда приводит к снижению значения показателя Херста. Для того, что бы показатель Херста оказался близким к нулевому значению импульсные переходные функции и автокорреляционные функции исходных данных должны как можно чаще менять свой знак.

Тот факт, что схему моделирования (рис. 2) удается использовать для размножения данных, позволяет значительно сократить размеры представительной исходных выборки. В биометрических приложениях это позволяет сократить число используемых биометрических образов и повысить надежность предсказаний вероятностей ошибок первого и второго рода. Применительно к данным рынка корреляционный метод оценки показателя Херста позволяет чаще получать более достоверные результаты на том же потоке исходных данных биржевых индексов.

Для теории крайне важным является то, что интерпретация показателя Херста [1, 2, 3] как некоторого показателя «таинственной долговременной» памяти исследуемой системы не верно. Показатель Херста однозначно связан с формой импульсной переходной функции $w(\tau)$ обычной «короткой» памятью динамической системы. Если исследуемая динамическая система линейна, то при ее идентификации вообще не возникает каких либо технических трудностей [4, 5]. Если исследуемая система не линейна, то это приводит к замене уравнения свертки (7) на соответствующий фрагмент ряда Вольтера.

Библиографический список

1. Mandelbrot B. Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis, Annals of Economic Social Measurement 1, 1972.
2. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. – М.: Мир, 2000. – 333 с.
3. Мандельброт Б., Ричард Л.Х. (Не) послушные рынки: фрактальная революция в финансах. – М.: Вильямс, 2006. – 400 с.
4. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 517 с.
5. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
6. Иванов А.И., Егорова Ю.Ю. Корреляционный метод быстрой оценки текущего значения показателя Херста биометрических данных и данных рынка // Нейрокомпьютеры, разработка и применение. – 2012. – № 3.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДВУХСЛОЙНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ОБРАЗЦА МАТЕРИАЛА

Д.И. Васюнин

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Актуальной задачей нанотехнологии и наноэлектроники является определение диэлектрических и магнитных параметров нанокompозитных материалов и сложных наноструктур с различной геометрией. Однако эти параметры, как правило, недоступны для экспериментального измерения (ввиду композитного характера материалов), что приводит к необходимости применять методы математического моделирования и решать указанные задачи численно.

В [1] задача определения диэлектрической проницаемости неоднородных образцов материалов произвольной геометрической формы, помещенных в прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками, сведена к решению нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения.

Постановка обратной задачи

Пусть в декартовой системе координат $P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$ – волновод с идеально проводящей поверхностью ∂P . В волноводе расположено неоднородное анизотропное тело Q ($Q \subset P$ – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и функцией переменной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$. Функция $\varepsilon(x)$ является ограниченной функцией в области \bar{Q} , $\varepsilon \in L_\infty(Q)$, а также $\varepsilon^{-1} \in L_\infty(Q)$. Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая.

Введем ток

$$\mathbf{J}(x) = \left[\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right] \mathbf{E}(x), \quad (1)$$

где $\mathbf{E}(x)$ – электрическое поле. Интегро-дифференциальное уравнение, к которому сводится обратная задача, имеет вид:

$$\left[\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right]^{-1} \mathbf{J}(x) = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \widehat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \text{grad div} \int_Q \widehat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x \in Q. \quad (2)$$

Здесь $\widehat{G}_E(x, y)$ – (известный) диагональный тензор Грина [2], k_0 – волновое число свободного пространства, $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, ω – круговая частота. Параметры волновода выбраны так, чтобы $\pi/a < k_0 < \pi/b$. В этом случае в волноводе может распространяться только одна мода.

$\mathbf{E}^0(x) = \mathbf{e}_2 A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} x_3}$ – известное падающее поле (мода в волноводе), $A^{(+)}$ – (известная) амплитуда падающей волны, $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$, \mathbf{e}_2 – второй орт в декартовой системе координат.

Требуется определить диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(x), x \in Q$ посредством серии измерений. Будем предполагать, что тело Q состоит из N подобластей Q_j таких, что $Q = \bigcup_j Q_j$,

$Q_i \cap Q_j = \emptyset, i \neq j$; $\varepsilon(x) = \varepsilon^{(j)}$ при $x \in Q_j$, то есть в каждой подобласти диэлектрическая проницаемость постоянна. Тогда общее число неизвестных параметров будет равно N . При измерениях изменяются частоты $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(N)}$ (происходит сканирование по частоте); при этом волновое число изменяется по формуле $k_0^{(i)} = \omega^{(i)} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Формулировка итерационного метода

Будем предполагать, что тело имеет форму параллелепипеда $Q = \{x: a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$. Выберем равномерную прямоугольную сетку в Q , образованную элементарными параллелепипедами

$$\Pi_{klm} = \{x: x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\}$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N_1} k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N_2} l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{N_3} m,$$

где $k=0, \dots, N_1-1, l=0, \dots, N_2-1, m=0, \dots, N_3-1$. Перенумеруем эти элементарные параллелепипеды с помощью одноиндексной нумерации Π_s ,

$s=0, \dots, N_0-1$, $N_0 = N_1 N_2 N_3$. Построим двухслойный итерационный процесс для решения обратной задачи по формулам:

$$\xi_n(x) = \left[\frac{\varepsilon_n(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right]^{-1}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \xi_n(x) \mathbf{J}_n(x) - k_0^2 \int_Q \widehat{G}(x, y) \mathbf{J}_n(y) dy - \\ & - \text{grad div} \int_Q \widehat{G}(x, y) \mathbf{J}_n(y) dy = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_n(x) = \xi_n(x) \mathbf{J}_n(x), \quad (5)$$

$$F = A + k_0^2 \frac{1}{ab\gamma_{10}} \int_Q \sin\left(\frac{\pi y_1}{a}\right) e^{i\gamma_1^{(2)} y_3} \eta_{n+1}(y) \mathbf{E}_n(y) \cdot \mathbf{e}_2 dy, \quad (6)$$

где

$$F = \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} Q_1^{(+)}, \quad A = \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} A^{(+)}, \quad \eta_n(x) = \left[\frac{\varepsilon_n(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right], \quad \xi_n(x) = \eta_n^{-1}(x). \quad (7)$$

По этим формулам вычисление производится следующим образом. Сначала выбираем начальное приближение $\varepsilon_0(x) = \varepsilon_e$ ($n=0$), где $\varepsilon_e = \varepsilon_{eff}$, ε_{eff} – эффективная диэлектрическая проницаемость тела, вычисленная как решение обратной краевой задачи с постоянной диэлектрической проницаемостью [1, 3]. Нельзя взять в качестве $\varepsilon_e = \varepsilon_0$, так как по формуле (5) нельзя определить электрическое поле. По формуле (3) вычисляется значение $\xi_0(x)$.

Далее, по формуле (4) определяется ток $\mathbf{J}_n(x)$ как решение интегродифференциального уравнения методом коллокации. Затем по формуле (5) по току определяем электрическое поле $\mathbf{E}_n(x)$ на сетке. Данную процедуру проводим N раз при различных значениях $k_0 = k_0^{(1)}, k_0 = k_0^{(2)}, \dots, k_0 = k_0^{(N)}$. Таким образом, получаем N значений полей $\mathbf{E}_n^{(1)}, \mathbf{E}_n^{(2)}, \dots, \mathbf{E}_n^{(N)}$ при различных $k_0^{(1)}, k_0^{(2)}, \dots, k_0^{(N)}$. На этом заканчивается вычисление на первом «слое».

На втором «слое» по известным значениям полей $\mathbf{E}_n^{(i)}(x)$ ($i = 1, \dots, N$) из формулы (6) определяем новое значение $\eta_{n+1}(x)$. Для этого потребуется произвести решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), составленной из уравнения (6), относительно неизвестных параметров. При этом «коэффициенты прохождения»

ния» $F_i = F(k_0^{(i)})$ находятся с помощью измерений. Считаем, что $A^{(+)} = 1$.

Формула (6) приводит к конечномерной СЛАУ. Образует матрицы $E = \{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_n^{(i,l)}\}_{i=1, l=1}^{N, N_0}$ размера $N_0 \times N$ и $H = \{H_{lj}\}_{l=1, j=1}^{N_0, N}$ размера $N_0 \times N$, где $H_{lj} = 0$ при l таких, что $\Pi_l \not\subset Q_j$. Тогда будем иметь СЛАУ с матрицей $A_N = EH$ размера $N_0 \times N$:

$$A_N \eta_{n+1} = B, \quad (8)$$

которая решается относительно неизвестных $\eta_{n+1} = (\eta_{n+1}^{(1)}, \dots, \eta_{n+1}^{(N)})^T$. Здесь и ниже мы будем отождествлять (кусочно-постоянную) функцию $\eta_{n+1} = \eta_{n+1}(x)$ и вектор $(\eta_{n+1}^{(1)}, \dots, \eta_{n+1}^{(N)})^T$, так как они однозначно определяют друг друга.

Коэффициенты матрицы A_N и правой части B в случае изотропного неоднородного тела вычисляются по формулам:

$$a_{ij} = \sum_{l: \Pi_l \subset Q_j} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_n^{(i,l)} H_{li}, \quad (9)$$

$$H_{li} = \int_{\Pi_l} \sin\left(\frac{\pi y_1}{a}\right) e^{i y_3 \sqrt{(k_0^{(i)})^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}} dy_1 dy_2 dy_3, \quad b_i = \frac{(F_i - A)ab}{(k_0^{(i)})^2} \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} - (k_0^{(i)})^2}. \quad (10)$$

Далее проверяется выполнение неравенств $|\eta_{n+1}^{(i)} - \eta_n^{(i)}| < \delta$ ($i=1, \dots, N$) с заданной точностью $\delta (>0)$. Если требуемая точность достигнута для каждого $\eta_{n+1}^{(i)}$ ($i=1, \dots, N$), то вычисления прекращаются. Если требуемая точность не достигнута, то $\xi_{n+1}(x) := \eta_{n+1}^{-1}(x)$, $n := n+1$ и вычисления повторяются с формулы (4).

В качестве искомого выбирается значение для относительной диэлектрической проницаемости $\frac{\epsilon_n(x)}{\epsilon_0} = \eta_n(x) + 1$.

Ключевым моментом в данном двухслойном итерационном процессе является возможность определения $\epsilon_{n+1}(x)$ по известному полю $\mathbf{E}_n(x)$ из формулы (5). Если искомая функция $\epsilon(x)$ имеет N неизвестных параметров, то необходимо иметь по крайней мере результаты N различных измерений.

Поскольку размер матрицы A_N сравнительно невелик (не более нескольких тысяч) при решении системы (10) можно воспользоваться простыми методами решения систем линейных алгебраических уравнений, например, методом Гаусса с выбором ведущего элемента по всей матрице.

Библиографический список

1. Смирнов Ю.Г. Применение ГРИД технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – №3. – С. 2 – 10.
2. Васюнин Д.И., Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г. Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 68–78.
3. Kobayashi K., Shestopalov Yu.V., Smirnov Yu.G. Investigation of Electromagnetic Diffraction by a Dielectric Body in a Waveguide Using the Method of Volume Singular Integral Equation. SIAM Journal of Applied Mathematics. – Vol. 70. – No. 3. – 969–983. – 2009.

СОЗДАНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ БАЗЫ ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО СОВЕРШЕНСТВОВАНИЮ СТРУКТУРЫ КРИСТАЛЛОВ КРЕМНИЯ

Л.А. Сухарев, О.Е. Каледин, А.М. Чекушкина, А.В. Пухкой

Мордовский государственный университет,
г. Саранск, Россия

Кремний является одним из базовых материалов твердотельной электроники. Качество приборов, изготавливаемых на его основе, во многом зависит от свойств этого кристаллического вещества, его структуры, строения и деформации. Поэтому исследование изменений в структуре кремния под воздействием лазерного облучения представляет значительный научный и практический интерес. Решение проблемы изменения структуры кремния, придание ему желаемых свойств в значительной мере зависит от разработки методологии и применения математического моделирования физического процесса. Имея данные по обработке кристаллов с различным

распределением плотности дислокаций, необходимо построить функцию распределения интегральной интенсивности. Построенная функция позволяет учесть характеристики лазерного излучения, дает возможность связать изменение структуры полупроводникового кремния с изменениями этих характеристик. Проведенный численный эксперимент даст возможность по наперед задаваемым параметрам кремния подобрать необходимые характеристики лазерного излучения для совершенствования структуры кристалла.

Одной из задач здесь является создание базы знаний, которая содержит результаты экспериментальных исследований.

При сканировании результатов экспериментальных исследований появляются погрешности – «шумы», которые необходимо исключить из исходного изображения. Для этого используется специальный фильтр изображения – «Dilation». Суть фильтра состоит в том, что он увеличивает светлые области изображения, распространяя их за пределы других пикселей. Эта операция является операцией определения локального максимума по некоторой окрестности, а окрестность задается с помощью структурообразующего элемента. Мы преобразуем эту окрестность с помощью так называемой матрицы сверстки, имеющей размеры 5x5, значения которой мы регулируем в зависимости от исходного изображения. Если центральный элемент матрицы равен 1, а остальные все 0, то мы получаем исходное изображение. Изменяя значения вокруг этого центрального элемента, мы избавляемся от ненужных нам погрешностей изображения. Выбрав оптимальную матрицу, можно достичь нужного нам качества изображения.

Для хранения изображений используется наиболее простой BMP-формат. Формат пикселей задается глубиной 32 бита на пиксель. 32-битный цвет состоит из четырех каналов: альфа (прозрачность), красный, зеленый, синий: ARGB (Alpha, Red, Green, Blue). Иногда альфа-канал не используется, в этом случае изображение всё равно может занимать 32 бита. В этом случае названия каналов записываются так: XRGB. Каждый канал занимает 8 бит (1 байт) и может принимать 256 значений: от нуля до 255. В формате BMP изображение хранится построчно снизу вверх, то есть первыми записываются нижние строки, затем верхние. Недостатком здесь является большой размер изображения, а удобством – относительная простота его обработки. Для распознавания графика необходимо задать точку, которая будет являться началом координат.

На рисунках представлены отсканированное изображение (рис. 1) и изображение, обработанное фильтром «Dilation» (рис. 2).

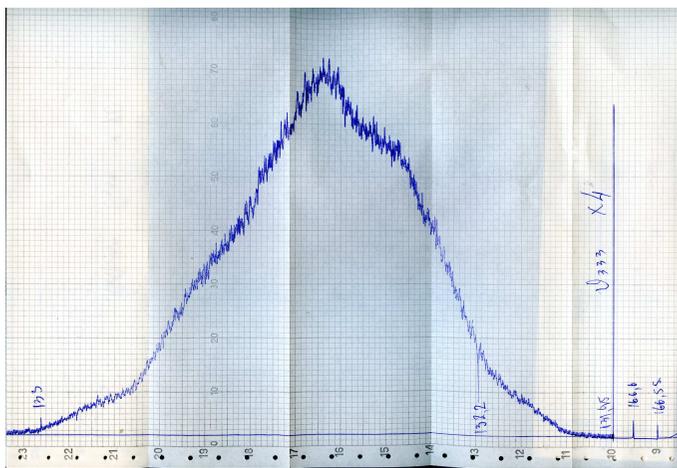


Рис. 1. Исходное изображение

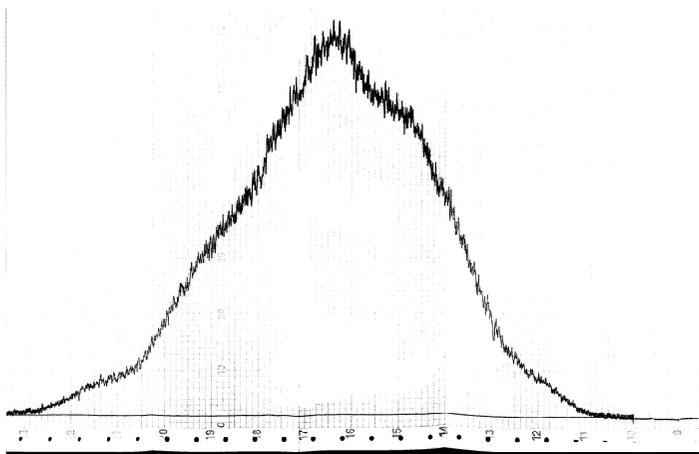


Рис. 2. Фильтр «Dilation»

Алгоритм распознавания заключается в том, что, выбрав начало координат, мы с конкретным очень маленьким шагом начинаем идти вправо, то есть в сторону увеличения значения X , до тех пор, пока не достигнем максимального значения. На каждом таком шаге ищем нужную нам точку черного цвета, которая является значением Y . При использовании цветовой модели RGB черный цвет будем определять значением канала B и считать точку черной, если значение меньше 110. Для проверки правиль-

ности работы алгоритма отбора «шумов» и сканирования используются тестовые специально подготовленные «зашумленные» изображения и возможность отсканированные данные снова отобразить в виде графика.

Использование полученной, таким образом, базы экспериментов позволит получить зависимость значений интегральной характеристики кристаллов кремния от начальных параметров облучения и выработать рекомендации по совершенствованию технологии производства промышленного кремния и улучшить характеристики полупроводниковых приборов, изготавливаемых на его основе.

Библиографический список

1. Евченко А.И. OpenGL и DirectX. Программирование графики (Для профессионалов). – 2006. – С. 183.
2. Золина Т.В. Математическое моделирование динамических процессов в кристаллах кремния после лазерного облучения: дис. ... канд. техн. наук. – Саранск, 2007.

ВЗАИМОСВЯЗЬ ВРЕМЕНИ СВОБОДНОЙ РЕЛАКСАЦИИ И СТРУКТУРЫ МАКРОМОЛЕКУЛЫ ДЛЯ РАСТВОРОВ ДЕНДРИМЕРОВ

Г.В. Козлов, И.В. Долбин, М.А. Тленкопачев

Кабардино-Балкарский государственный университет,
г. Нальчик, Россия,
Мексиканский национальный университет,
г. Мехико, Мексика

Время свободной релаксации растворов полимеров $\langle \tau_d \rangle$, определяемое экспериментально, является параметром, чувствительным к изменению размеров и конформации макромолекул. Оно характеризует скорость, с которой исчезает преимущественная ориентация оптически анизотропных молекул, установившаяся под действием внешнего электрического поля, приложенного к раствору [1]. Это предполагает, что величина $\langle \tau_d \rangle$ контролируется структурой макромолекулы, которая в рамках фрактального анализа характеризуется фрактальной размерностью D_f . Цель настоящего сообщения – проверка этого предположения на примере полимеров со сложной молекулярной архитектурой – дендримеров.

Использованы экспериментальные данные для модифицированного дендронами полистирола (ПСД) первой-четвертой генерации [1] и цилиндрического дендримера на основе L-аспарагиновой кислоты (LP3-3) третьей генерации [2].

Для расчета фрактальной размерности D_f макромолекулы в растворе, которая является структурной характеристикой в строгом физическом смысле этого термина, использована следующая формула [3]:

$$D_f = \frac{3}{1 + a_\eta}, \quad (1)$$

где a_η – показатель в уравнении Марка-Куна-Хаувинка, связывающем характеристическую вязкость и молекулярную массу полимера.

На рис. 1 приведена зависимость $\langle \tau_d \rangle(D_f)$ для рассматриваемых дендримеров, из которой следует быстрый спад времени релаксации по мере роста фрактальной размерности макромолекулы. Такую форму зависимости $\langle \tau_d \rangle(D_f)$ можно объяснить двумя факторами. Как известно [3], радиус инерции макромолекулярного клубка R_g связан с величиной D_f и степенью полимеризации $N_{пол}$ полимера уравнением:

$$R_g = BN_{пол}^{1/D_f}, \text{ нм.} \quad (2)$$

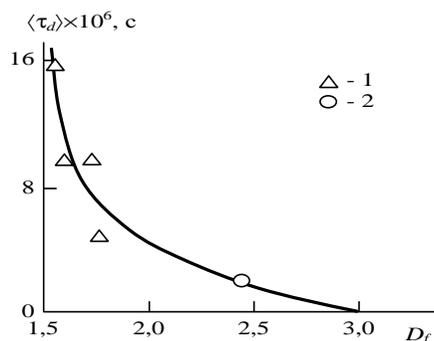


Рис. 1. Зависимость времени свободной релаксации $\langle \tau_d \rangle$ от фрактальной размерности D_f макромолекулы для растворов дендримеров ПСД в тетрагидрофуране (1) и LP3-3 в хлороформе (2)

Как можно видеть, уравнение (2) предполагает очень сильную (степенную) зависимость R_g от D_f . Оценка согласно уравнению (1) показала, что для рассматриваемых дендримеров величина D_f варьируется в пределах 1,52-2,42. Используя разумные величины $N_{пол}=1000$ [1] и $B=0,35$ [3], получим вариацию R_g в пределах ~ 6 -33 нм, т.е., в 5,5 раз, для рассматриваемых дендримеров, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [1, 2]. Очевидно, что переориентация малых макромолекулярных клубков в растворе происходит гораздо легче, чем больших, и занимает гораздо меньше времени, т.е., $\langle \tau_d \rangle$.

Вторым фактором может быть резкое увеличение плотности $\rho_{кл}$ макромолекулярного клубка по мере роста D_f . Величину $\rho_{кл}$ клубка как фрактального объекта можно оценить согласно соотношению [3]:

$$\rho_{кл} \sim \left(\frac{R_g}{a} \right)^{D_f - d}, \quad (3)$$

где a – нижний линейный масштаб фрактального поведения, d – размерность евклидова пространства, в котором рассматривается фрактал (очевидно, в нашем случае $d=3$).

Принимая в качестве a размерную границу низко- и высокомолекулярными веществами ($a=1$ нм) и $R_g=32$ нм, получим согласно уравнению (3) увеличение $\rho_{кл}$ от 0,0059 до 0,134 в интервале $D_f=1,52-2,42$, т.е. в ~ 23 раза, для рассматриваемых дендримеров. Очевидно, что такой рост плотности клубка будет затруднять ориентацию его фрагментов во внешнем электрическом поле, что облегчает их релаксацию при снятии этого поля, т.е. снижает $\langle \tau_d \rangle$.

Для подтверждения сделанного выше предположения на рис. 2 приведена зависимость $\langle \tau_d \rangle(R_g)$ для рассматриваемых дендримеров. Как и ожидалось, наблюдается линейное снижение $\langle \tau_d \rangle$ по мере увеличения R_g , аналитически описываемое следующим эмпирическим уравнением:

$$\langle \tau_{кл} \rangle = 0,43 \times 10^6 R_g, \text{ с}, \quad (4)$$

где R_g дается в нм.

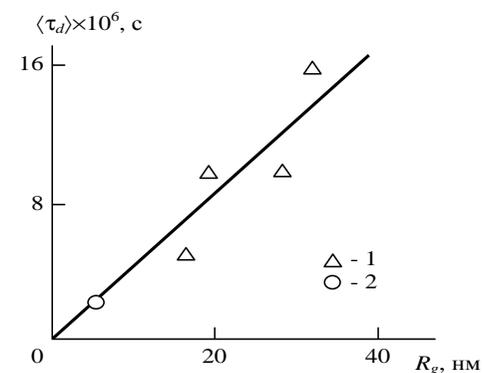


Рис. 2. Зависимость времени свободной релаксации $\langle \tau_d \rangle$ от радиуса инерции R_g макромолекулы для растворов дендримеров ПСД в тетрагидрофуране (1) и LP3-3 в хлороформе (2)

Зависимость $\langle \tau_d \rangle (R_g)$ проходит через начало координат по очевидной причине: при $R_g \rightarrow 0$ все ориентации молекулы одинаковы, поскольку она является ноль-мерным (точечным) объектом, и поэтому ее релаксация из любого положения не имеет физического смысла.

Следовательно, время свободной релаксации макромолекулы дендримеров в растворе является функцией ее структуры, что и следовало ожидать в силу общего постулата: любое свойство объекта контролируется его структурой.

Библиографический список

1. Лезов А.В., Мельников А.Б., Филиппов С.К., Полушина Г.Е., Антонов Е.А., Михайлова М.Е., Рюмцев Е.И. // Высокомолек. соед. А, 2006. – Т. 48. – № 3. – С. 508 – 515.
2. Цветков Н.В., Андреева Л.Н., Филиппов С.К., Бушин С.В., Безрукова М.А., Марченко И.А., Стрелина И.А., Алябьева В.П., Гирбасова Н.В., Билибин А.Ю. // Высокомолек. соед. А, 2010. – Т. 52. – № 1. – С. 11 – 22.
3. Козлов Г.В., Долбин И.В. // Высокомолек. соед. Б, 2002. – Т. 44. – № 1. – С. 115 – 118.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ МОДЕЛЬ ЭФФЕКТА АУТОГЕЗИИ

Х.Ш. Яхьяева, Г.В. Козлов, Г.М. Магомедов

Дагестанский государственный педагогический университет,
г. Махачкала, Россия

Как известно, в полимерах при определенных критических значениях молекулярной массы MM формируется сетка макромолекулярных зацеплений, что приводит к резкому повышению их механических свойств. Аналогичный эффект следует ожидать и в случае аутогезии (сцепления) полимеров. Как показано в работе [1], прочность аутогезионного соединения на сдвиг τ_k для двухслойных пленок полистирола (ПС) увеличивается линейно по мере роста толщины межфазного слоя l_{mf} в интервале $\sim 3-9$ нм. Отметим, что указанные значения l_{mf} меньше величины радиуса инерции R_g макромолекулярного клубка ПС при использованной в работе [1] величине $MM \approx 1,2 \times 10^5$. Указанную величину R_g можно рассчитать согласно уравнению [2]:

$$R_g = l_0 \left(\frac{C_\infty MM}{6m_0} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где l_0 – длина связи С-С, равная 0,154 нм, C_∞ – характеристическое отношение, равное 10,5 для ПС, m_0 – мольная масса на скелетную связь, равная 52 для ПС [2].

Расчет согласно уравнению (1) при указанных выше параметрах дает величину $R_g=9,8$ нм, что определяет условие $R_g > l_{mf}$. Следовательно, эволюция граничного слоя, которая заключается в увеличении его толщины l_{mf} , приводит к растущему участию макромолекулярного клубка в формировании указанного слоя и, следовательно, в образовании каркаса макромолекулярных зацеплений. Эту долю макромолекулярного клубка можно выразить отношением $(l_{mf}/R_g)R_g$ или просто l_{mf} . В рамках фрактального анализа число контактов макромолекулярных клубков N_k с размерностями D_{f1} и D_{f2} , которое эквивалентно числу макромолекулярных зацеплений, можно выразить следующим соотношением [3]:

$$N_k \sim R_g^{D_{f1}+D_{f2}-d}, \quad (2)$$

где d – размерность евклидова пространства, в котором рассматривается фрактал (очевидно, в нашем случае $d=3$).

Учитывая вышесказанное, величину R_g в соотношении (2) следует заменить на l_{mf} и, поскольку в случае аутогезии граничный слой формирует один и тот же полимер (в данном случае – ПС), то справедливо условие $D_{f1}=D_{f2}=D_f$. Тогда соотношение (2) принимает более простой вид:

$$N_k \sim l_{mf}^{2D_f-d}. \quad (3)$$

Рассмотрим метод оценки величины фрактальной размерности D_f . Для линейных полимеров величина D_f связана с размерностью структуры d_f твердофазного полимера следующим простым уравнением [4]:

$$D_f = 0,667d_f. \quad (4)$$

В свою очередь, величину d_f можно определить согласно формуле [4]:

$$d_f = 3 - 6 \left(\frac{\phi_{кл}}{SC_\infty} \right)^{1/2}, \quad (5)$$

где $\phi_{кл}$ – относительная доля областей локального порядка (кластеров), S – площадь поперечного сечения макромолекулы, равная для ПС $54,2 \text{ \AA}^2$ [4].

Величина $\phi_{кл}$ определена согласно следующему перколяционному соотношению [4]:

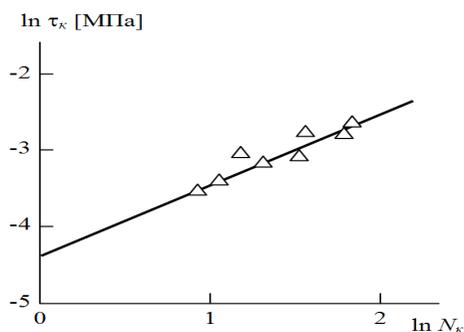
$$\phi_{кл} = 0,03(T_c - T)^{0,55}, \quad (6)$$

где T_c и T – температуры стеклования и испытаний полимера ($T_c=373$ К [4], $T=293$ К).

Затем расчет согласно уравнениям (4)-(6) дает следующие значения размерностей: $d_f=2,847$, $D_f=1,898$. На рисунке приведена зависимость $\tau_k(N_k)$ в двойных логарифмических координатах для случая аутогезии ПС [1]. Как и следовало ожидать из самых общих соображений, прочность аутогезионного соединения τ_k возрастает по мере роста число макромолекулярных зацеплений N_k и эта корреляция аппроксимируется так:

$$\ln \tau_k = \ln N_k - 4,4. \quad (7)$$

Из уравнений (2) и (3) следует, что $\ln N_k=0$ достигается при $D_f=1,5$, т.е. в случае протекаемых (проницаемых друг для друга) макромолекулярных клубков. В этом случае минимальная величина $\tau_k=0,0123$ МПа определяется только взаимодействием сегментов полимера между собой (когезией). Максимальное значение $\tau_k=0,141$ МПа при $l_{mf}=R_g$. Отметим, что вклад сетки макромолекулярных зацеплений является определяющим для прочности аутогезионного соединения и в интервале $l_{mf}=(0,1-1,0)R_g$ его относительная величина варьируется в пределах 63-91%, тогда как доля когезии составляет 37-9%. Такое соотношение является типичным для механических свойств полимеров вообще [4].



Зависимость прочности аутогезионного соединения на сдвиг τ_k от числа макромолекулярных контактов N_k для ПС в двойных логарифмических координатах

Библиографический список

1. Tanaka K., Nagamura T. Mater. Intern. Conf. on Polymer and Advanced Materials. POLYMEX-2006. Huatulco, Mexico, 2006, Session 1, p. 51.
2. Schnell R., Stamm M., Creton C. Macromolecules, 1998. – v. 31. – № 7. – P. 2284 – 2292.
3. Vilgis T.A. Physica A, 1988, v. 153. – № 2. – P. 341 – 354.
4. Козлов Г.В., Овчаренко Е.Н., Микитаев А.К. Структура аморфного состояния полимеров. – М.: Изд-во РХТУ им. Д.И. Менделеева, 2009. – 392 с.

**АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ТЕКСТУРЫ АНИЗОТРОПНОГО ДИЭЛЕКТРИКА
С ПОЗИЦИЙ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

С.Я. Задера

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Самой надежной моделью любого физического процесса являются дифференциальные уравнения. Постановка общей задачи качественного исследования дифференциальных уравнений принадлежит Пуанкаре [1]. Эту задачу можно сформулировать так: не интегрируя заданного дифференциального уравнения, по свойствам правой его части дать возможно более полную картину расположения кривых, удовлетворяющих этому уравнению, во всей области их существования. Аналогичная постановка применима к системе дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

где функции $P(x, y), Q(x, y)$ однозначны и непрерывны в области G определения x, y . Какие бы значения x_0, y_0 из этой области мы ни задавали и какое бы значение t_0 мы ни взяли, существует одно и только одно решение системы (1),

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \quad (2)$$

удовлетворяющее условиям $x_o = \varphi(t_o), y_o = \psi(t_o)$ и определенное в некотором промежутке $t_o - \xi < t < t_o + \xi$ (теорема Коши).

Так как t не входит в правые части системы (1), то наряду с решением (2) существует бесконечное множество других решений

$$x = \varphi(t + C), y = \psi(t + C), \quad (3)$$

где C – любая постоянная.

Решение системы (1) можно геометрически интерпретировать в пространстве (x, y, t) кривыми, лежащими в цилиндрической области, образованной прямыми, параллельными оси t , пересекающими плоскость (x, y) в точках области G (рис.1). Через каждую точку этой цилиндрической области проходит одна и только одна кривая, причем кривые (2) и (3) получаются друг из друга сдвигом по оси t на расстояние C [2].

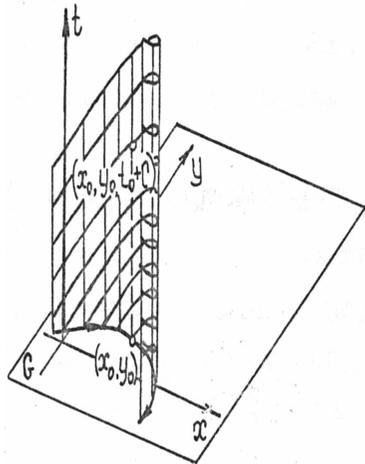


Рис.1. Геометрическая интерпретация решения динамической системы в пространстве (x, y, t)

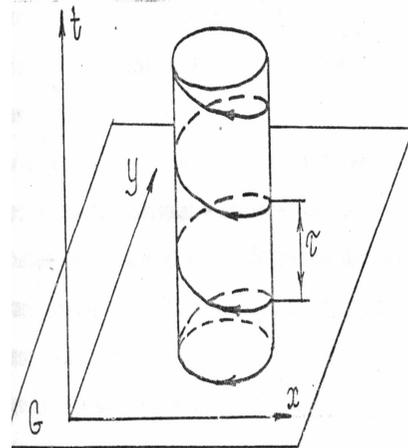


Рис.2. Изображение периодического решения в пространстве (x, y, t)

Интересны два частных типа решений:

- а) периодические; они изображаются в пространстве (x, y, t) винтовой линией с шагом, равным периоду τ (рис.2);
- б) стационарные; в этом случае

$$x = x_o, y = y_o,$$

где x_0, y_0 – постоянные. Они получаются при задании таких начальных значений x_0, y_0 , которые являются решением системы уравнений

$$P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0. \quad (4)$$

Геометрически таким решениям соответствуют прямые, параллельные оси t .

В задачах, возникающих из приложений, t часто имеет смысл времени, а система (1) определяет закон движения точки, помещенной в начальный момент времени t_0 в одну из точек (x_0, y_0) области G плоскости (x, y) .

Каждому решению системы (1) на плоскости (x, y) соответствует кривая – траектория движения. Интегральные кривые, изображающие в пространстве (x, y, t) решения (2) и (3), сдвинутые во времени, имеют одну и ту же проекцию на плоскость (x, y) – траекторию, уравнения которой могут быть записаны в виде:

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0) = x(t), \quad y = \psi(t - t_0, x_0, y_0) = y(t). \quad (5)$$

В (5) x_0, y_0, t_0 – начальные значения, а x, y – координаты движущейся точки.

При этой интерпретации периодическим решениям соответствуют замкнутые траектории, а стационарным – траектории, выродившиеся в точки. Такие точки называют состояниями равновесия. Плоскость (x, y) именуется фазовой плоскостью системы (1), а траектории – фазовыми траекториями.

К графическим методам решения дифференциальных уравнений относится метод изоклин, который дает возможность исследовать поле интегральных кривых графически, не решая дифференциальных уравнений. При этом ищут интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (6)$$

(6) получают из системы (1) исключением независимой переменной t . Предположим, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \equiv F(x, y) = C = const. \quad (7)$$

Это уравнение полностью определяет изоклину – кривую на плоскости (x, y) , вдоль которой наклон интегральных кривых остается постоянным. Очевидно, наклон интегральных кривых в особой точке не определяется однозначно: в ней изоклины пересекаются.

Процедура решения системы уравнений (1) методом изоклин совершенно аналогична процедуре радиополяризационных исследований. Изоклины различных параметров записываются экспериментально. Затем на одном рисунке изображают изоклины различных параметров. По ним строятся изостаты – фазовые траектории – на плоскости (x,y) . Построение изостат есть по сути графическое решение уравнения (7). Методы его решения известны как в математике, так и в теории фотоупругости. Неизвестно исходное дифференциальное уравнение, однако его решение извлекается из реологической памяти изделия.

На рис. 3 приведены совокупности изоклин и изостат в диске из высоковольтного фарфора [5]. Заготовки формовали на вакуум-прессах путем проталкивания массы через мундштук, осуществляя вращение шнека. Формовка сопровождалась сложными пластическими деформациями массы, результатом которых явилась определенная ориентация пластинчатых кристаллов минералов глин, полевого шпата и кварца. Для исследования с цилиндрической заготовки срезали пласт, имевший форму диска, толщиной 15 – 20 мм и диаметром 120 мм. На картине изостат в центре имеется состояние равновесия, являющееся топологическим узлом.

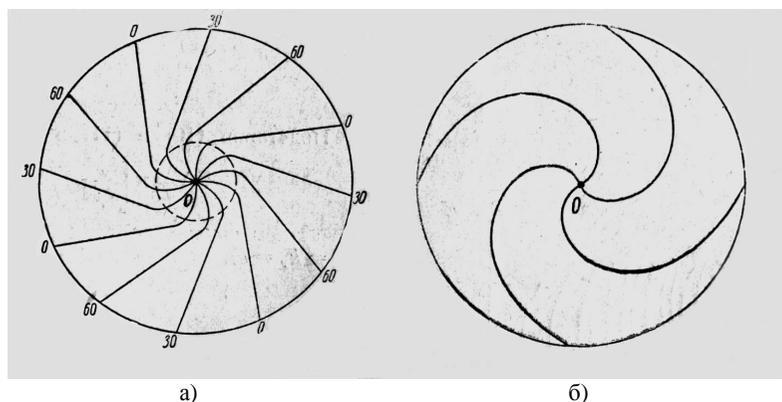


Рис. 3. Совокупности изоклин (а) и изостат (б) в фарфоровом диске, сформованном путем выдавливания

На рис. 4 изображены изостаты для диска из радиокерамики. Такие диски получают путем заливки жидкой керамической массы в форму через отверстие, расположенное в точке А, под давлением. На картине изостат видим, что отверстие совпадает с топологическим узлом в точке А, а траектории, выходящие из него, находятся в параболическом секторе.

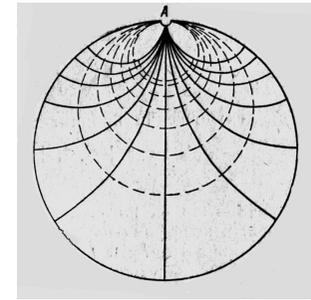


Рис. 4. Изостаты в керамическом диске, сформированном путем заливки жидкой массы в форму через отверстие

В радиоинтроскопии такие точки, как точка О на рис. 3 и точка А на рис. 4, называют изотропными. В них сходятся изоклины всех параметров. На самом деле изотропные точки самые опасные. Эти точки правильнее называть квазиизотропными или особыми. Растрескивание образца на рис.3 при сушке или обжиге начинается в центре и имеет форму буквы S.

На рис. 5 представлены изоклины и изостаты для керамического образца, сформованного на шнековом прессе [6]. В нем из-за трения глиномассы о стенки шнеков и цилиндра создаются переуплотненные участки, формирующие слоистую структуру, приводящую к образованию S-треска еще на стадии сушки. Траектории на этом рисунке огибают две особые точки А и В в местах пересечения изоклин всех параметров и имеют также форму буквы S.

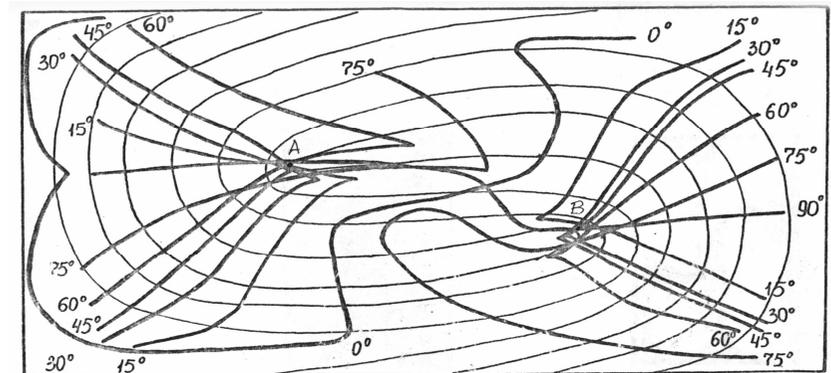


Рис. 5. Изоклины и изостаты для керамического образца, сформованного на шнековом прессе

Существуют особые точки другого типа, где изоклины не пересекаются, но очень близко подходят друг к другу, как бы наматываясь на невидимую поверхность. Эти области обозначены буквами А и В на рис. 6 [7]. Для этих образцов характерен S-треск через области А, В и точку С при последующей термической обработке.

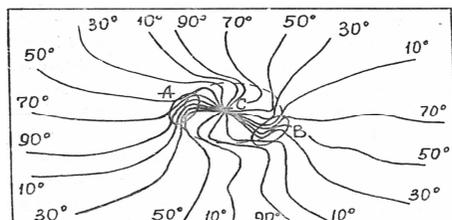


Рис. 6. Поле изоклин, полученное на радиополярископе в поперечном срезе фарфорового изолятора. А, В, С – особые точки

Контур, вдоль которого скользят квазиизотропные области, назовем свободным, так как он действительно свободен от внешних касательных и нормальных напряжений. Известно [8], что в точках, лежащих на свободном контуре, существует только одно главное напряжение и направлено по касательной к контуру. Точки этого контура являются точками перехода от растяжения к сжатию: становится понятным разрушение образца именно в этих точках.

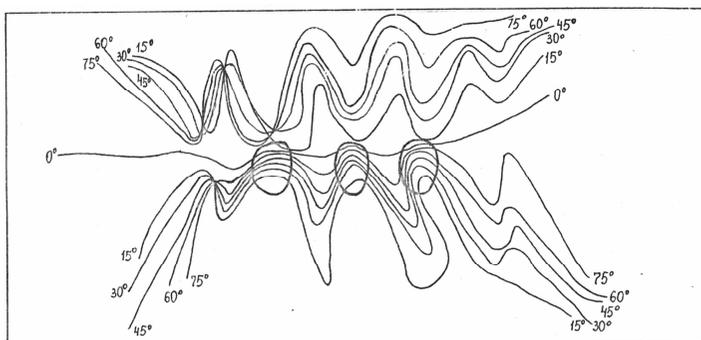


Рис. 7. Изоклины в керамическом образце, изготовленном на роторном прессе с гладкими дисками

С позиций вариационного метода изоклины рассматриваются как лучи, а области А и В на рис. 6 ограничены огибающей семейства экстремалей. В оптике такие огибающие называют каустиками. И мы

назовем выделенные на этом рисунке квазиизотропные области каустиками. Как показывает опыт, особые точки (области) типа каустик подвержены разрушению в первую очередь.

На рис. 7 показано поле изоклин в керамическом образце, изготовленном на роторном прессе с гладкими дисками [6]. Отмеченные кружками области типа каустик служат причиной разлома образца при испытаниях на изгиб.

На рис. 8,а и рис. 8,б изображены изостаты для прессованных резин, используемых в шинном производстве. Массивные шины изготавливают прессованием резиновых полос толщиной 2 мм, намотанных на металлический каркас. Причину брака технологи видели в образовании воздушных пузырьков между слоями резины. Предварительные радиоинтроскопические исследования показали, что в режиме «на отражение» в 100 мм толщ резины, обладающей значительным поглощением, неоднородностью и анизотропией, не удалось выделить непрочней на фоне остальных помех. Исследование же макроструктуры отдельных резиновых полос показало, что причина взрывов кроется в наличии особых точек, которые образуются на стадии изготовления этих полос. Из резины вырезали образцы, прессовали и вулканизовали их в форме, а затем исследовали на радиополярископе. Из каждого образца прессованной резины размерами 14 см×14 см и толщиной 2 мм вырезали по 5 лопаток, изображенных на рис. 8, а, б, и испытывали на разрыв, записывая напряжения и отмечая места разрывов. В зону испытаний попали особые точки, отмеченные на рис. 8, а, б кружками. В них и произошли разрывы.

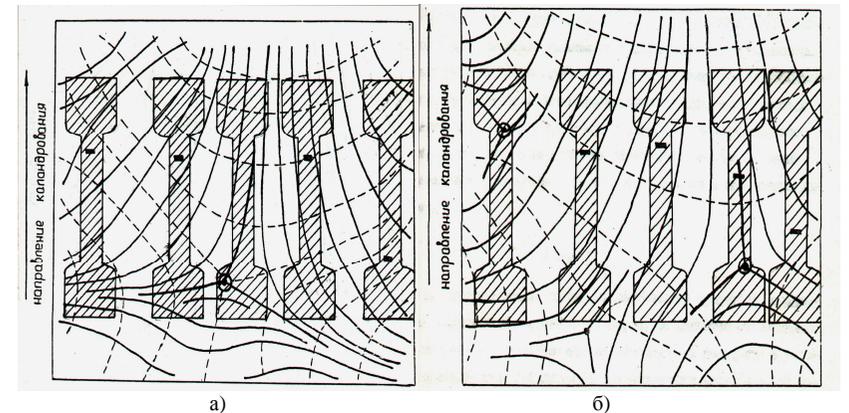


Рис. 8. Поле изостат для резиновой полосы, используемой в шинном производстве: а) для образца № 1; б) для образца № 2

Особые точки с тремя сепаратрисами не встречаются в качественной теории дифференциальных уравнений, хотя существование их предполагается. Они представляют интерес с точки зрения прогнозирования прочностных свойств прессованной резины, так как являются концентраторами напряжений и могут служить источником взрывной волны.

Таким образом, радиоинтроскопические исследования выявляют особую роль изотропных (особых) точек при прогнозировании прочностных свойств материала. Именно они являются источниками волны разрушения (треска, разлома, взрыва) при испытании или эксплуатации изделий. Устранение особых точек в текстуре материала – надежный путь повышения качества изделий.

Библиографический список

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1947. – 392 с.
2. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.
3. Лифшиц С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1961.
4. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – 550 с.
5. Рудаков В.Н., Белянин А.Н., Зеленков А.Л., Лебедев А.И. О макроскопической структурной анизотропии промышленных изделий // Дефектоскопия. – 1966. – № 5. – С. 107 – 112.
6. Баранцева С.Я. Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействия электромагнитного поля со структурными элементами тел: дис. ... канд. техн. наук. – Л., 1985. – 242 л.
7. Николаева Г.А. Теоретические и экспериментальные основы исследования анизотропии диэлектриков методами СВЧ интроскопии: дис. ... канд. техн. наук – Л., 1979. – 233 л.
8. Фрохт М. Фотоупругость. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1950, т.2. – 488 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА К МАГНИТНЫМ ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДАМ

Е.В. Шабунина, М.Е. Шабунин, Д.В. Спирин, В.Н. Удодов

Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова,
г. Абакан, Россия

Вычисление статистического интеграла с потенциалом общего вида для континуальной модели – задача сложная и не решаемая. Возни-

кает необходимость перехода к модели с существенным ограничением радиуса действия потенциала. Благодаря этому вместо «реального» межатомного потенциала, задаваемого некоторой функцией $\psi(r)$ с бесконечным числом возможных значений, появляется конечный набор значений этой функции в точках, определяемых возможными расстояниями между узлами решётки в пределах радиуса действия потенциала. В случае классической модели Изинга от «бывшего» межатомного потенциала остаётся только одна константа – значение потенциала взаимодействия между ближайшими соседями. Двумерная модель Изинга с дальним взаимодействием до сих пор не решена. Поэтому представляет интерес рассмотрение поведения упрощённых моделей с дальним взаимодействием. Одной из таких моделей является линейная (одномерная) модель со взаимодействием ближайших и следующих за ближайшими соседней.

В данной работе будет рассмотрена одномерная модель Изинга, применительно к магнитным системам. Учитывается взаимодействие до второй координационной сферы, а также как усложняющий фактор в модель вводятся немагнитные атомы примеси, что приближает модель к реальным условиям.

Узлы одномерного изинговского магнетика, выстроенные вдоль одной прямой (цепочкой), могут иметь равные по модулю магнитные моменты, ориентированные или вдоль некоторой оси, или в обратном направлении. Также в цепочке есть вероятность встретить узлы, результирующий момент которых равен нулю – немагнитные примеси. Граничные условия задаются как «оборванные концы». Для уменьшения числа изменяемых энергетических характеристик рассматривается гамильтониан, приведенный к энергии взаимодействия в первой координационной сфере:

$$\frac{H}{J_1} = -\sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1} - J_2 \sum_{i=1}^{N-2} S_i S_{i+2} - H \sum_{i=1}^N S_i, \quad (1)$$

где J_1 – энергия взаимодействия в первой координационной сфере, J_2 – относительная энергия обменного взаимодействия во второй координационной сфере, H – относительная напряженность внешнего магнитного поля, S_i – проекция вектора спина на выбранную ось, N – количество атомов системы.

При исследовании модели использовались методы численного моделирования, в основе которых лежит классический алгоритм Метрополиса с модифицированным выражением для энергии (1). При формировании начальной конфигурации немагнитные примеси занимают в

наноматематике случайные равновесные позиции и в течение всего процесса их положение в пространстве не изменяется («заморожены»), что соответствует низким температурам. Данная модель позволяет исследовать фазовый переход как из антиферромагнитного состояния в ферромагнитное так и обратно. Временем релаксации системы τ при магнитном переходе является число шагов Монте-Карло, за которое система из начального состояния достигнет равновесия. Момент равновесия наступает тогда, когда энергия системы E будет меньше либо равна средней энергии в состоянии равновесия $\langle E \rangle$ с учетом среднеквадратичного отклонения σ_E . Значение средней энергии рассчитывается в интервале шагов, достаточно удаленном от наступления равновесия.

При расчете времени релаксации перехода ферромагнетик – антиферромагнетик алгоритмом Метрополиса выполняется несколько реализаций L (параллельных опытов). Это необходимо для сглаживания процесса. Время релаксации τ зависит от количества реализаций алгоритма Метрополиса (рис. 1).

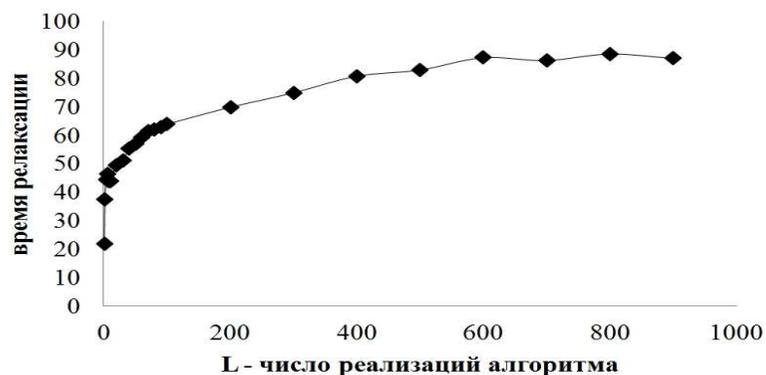


Рис. 1. Зависимость времени релаксации от числа реализаций алгоритма Метрополиса

Целесообразно определить оптимальное количество реализаций алгоритма L , так как увеличение количества реализаций алгоритма Метрополиса приводит к увеличению продолжительности работы программы.

Из рис. 2 следует, что относительная погрешность расчета времени релаксации ϵ_r при увеличении числа опытов L убывает. Следовательно, оптимальным решением является такое количество реализаций алгоритма, при котором относительная погрешность и время выполнения программы сравнительно невелики.

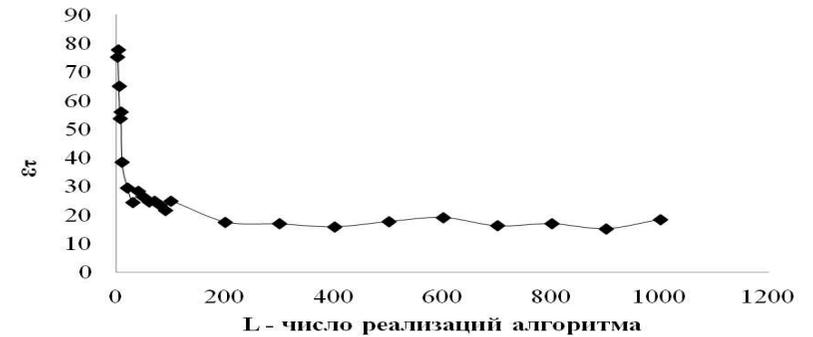


Рис. 2. Зависимость относительной погрешности времени релаксации от числа реализаций алгоритма Метрополиса

Кроме магнитных систем модель Изинга может описывать другие типы систем: бинарный сплав, в котором атомы двух элементов могут замещать друг друга в фиксированных узлах решетки (в этом случае модель используется для изучения процессов упорядочения и разупорядочения атомов в сплавах); решеточный газ (эта система служит для модельного описания критической точки жидкость-газ); модель перколяции (объекты – узел целый или заблокированный).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ КОМПОНЕНТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР

А.В. Князьков, Т.В. Семенова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Существует несколько разных определений размерности геометрического объекта. Топологическая размерность выражается целым числом и совпадает с интуитивным представлением: кривые одномерны, поверхности двумерны. Понятие дробной размерности появилось в 1919 г. в работе Феликса Хаусдорфа. Её аналогом, удобным для использования в прикладных задачах, может служить размерность Минковского. Математические идеи, приведшие к этому понятию, зародились в конце 19 столетия в работах Георга Кантора, Карла Вейерштрасса и Джузеппе Пеано. Интерес к этим идеям возрос в связи с работами Бенуа Мандельброта, который в 1975 г. ввёл понятие фрактала. Поскольку это понятие пока ещё находится

в развитии, и нет единого подхода к его определению, будем придерживаться определения, приведённого в литературе [1], а именно: если при разбиении исходного множества на N непересекающихся подмножеств, полученных масштабированием оригинала с коэффициентом r , выполняется равенство $N \cdot r^d = 1$, где d – нецелое число, то это множество называется самоподобным фракталом, а число d – фрактальной размерностью. Приведённое равенство легко разрешается относительно d : $d = \log_{\frac{1}{r}} N$.

Благодаря Бенуа Мандельброту фракталы уже используются во многих науках: физике, биологии, химии. В данной статье будет рассмотрено применение фрактальных структур для построения электронных компонентов.

Фрактальные структуры выгодно использовать в однослойных планарных конструкциях, в виде чередующихся слоев проводящего и диэлектрического материалов. Так за счет применения фрактальных структур можно увеличить емкость планарных конденсаторов, которая обычно ограничена величиной несколько пикофард, что связано с рядом конструктивных особенностей. На рис. 1 представлен пример такого конденсатора с использованием фрактала Минковского. Емкость элемента образуется в зазоре между двумя соседними полосками-электродами и зависит от величины зазора S , геометрических размеров полосок и от диэлектрической проницаемости среды, окружающей полоски. Такая конструкция имеет определенные преимущества.

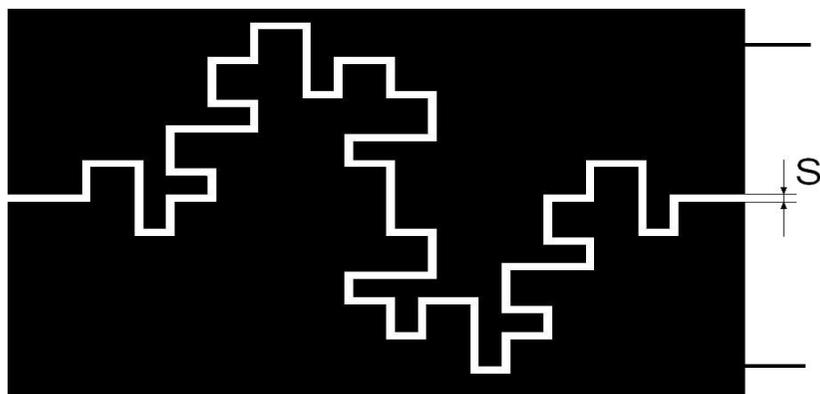


Рис. 1

Кривая Минковского является классическим геометрическим фракталом. Инициатором является отрезок, а генератором является ломаная из

восьми звеньев (два равных звена продолжают друг друга). Кривая Минковского имеет размерность $\frac{\ln 8}{\ln 4} = \frac{3}{2} = 1,5$ (поскольку она состоит из восьми равных частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия $1/4$). На рис. 1 планарный конденсатор построен при помощи кривой Минковского после двух итераций. Ее построение осуществляется следующим образом: исходный объект отрезок l_0 делится на четыре равные части, две средние части убирают и заменяют каждую на три новых отрезка длины $\frac{l_0}{4}$ так, чтобы они образовали квадрат. Процедуру повторяют с каждым из восьми новых отрезков. В итоге мы получаем кривую, состоящую из 8^n отрезков, длиной $\frac{l_0}{4^n}$, тогда как полная ее длина $L = l_0 \left(\frac{8}{4}\right)^n = l_0 2^n$. После двух итераций мы получаем кривую общей длиной $4l_0$.

Для моделирования планарных резисторов удобнее использовать кривые, заполняющие пространство. О таких кривых впервые упомянул итальянский математик Джузеппе Пеано в 1890 г. Рассмотрим кривую, показанную на рис. 2, которая носит название кривой Гильберта. На рисунке показана кривая после 3 итераций. Кривая Гильберта первого порядка похожа на изображение буквы П, вычерченной в виде трех сторон квадрата, длиной l_0 каждая. Кривая второго порядка состоит из трех кривых первого порядка, которые ориентированных в разные стороны (вправо, вверх и влево) и соединены тремя отрезками прямых длиной l_0 .

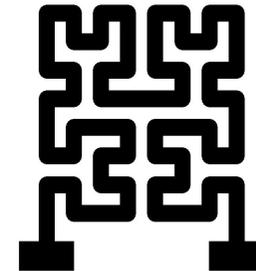


Рис. 2

Таким образом, применение фрактальных структур в планарных конструкциях позволяет в значительной степени повысить эффективность использования площади платы.

Библиографический список

1. Ричард М. Кронвер, Фракталы и хаос в динамических системах. Техносфера. – М., 2006.
2. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности / пер. с англ. – М., 1948.
3. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М., 1977.

ДИСКРЕТНОЕ ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д.В. Степовой, Л.Ю. Шипик

Азово-Черноморская государственная агроинженерная академия,
г. Зерноград, Россия

Одним из методов решения технико-экономических задач большой размерности выступает графовое моделирование, которое резко упрощает анализ структур производства, технологических комплексов, делает процедуры анализа понятными и прозрачными. Так, например, состояния некоторой системы (вершины графа) и переход из одного состояния в другое (дуги графа) эффективно представляются графом состояний данной системы.

Рассмотрим задачу моделирования уборочного процесса в некотором крупном хозяйстве. Несколько групп комбайнов на разных полях проводят уборку зерновых. Каждой группе комбайнов соответствует своя группа автомобилей, их обслуживающих. Уборочный процесс в произвольный момент времени будем рассматривать, как состояние системы S . Комбайны могут находиться в следующих состояниях: подготовки к работе, наполнения бункера, выгрузки зерна из бункера, ожидания разгрузки, ремонта. Состояния автомобилей: подготовка к работе, ожидание на поле, загрузка, движение на ток, выгрузка на току, движение с тока на поле. Поле может находиться в трех состояниях: уборка на поле, поле убрано или ожидание начала уборки. Как только одно из технических средств или поле изменило свое состояние, то считаем, что и вся система перешла в новое состояние. Поэтому процесс уборки интерпретируется как постепенные переходы системы из одного состояния в другое.

В качестве примера рассмотрим процесс уборки поля в котором участвуют комбайн и автомобиль. Каждое из двух технических средств может находиться в определенном числе состояний. Множество состояний комбайна обозначим X . Если состояние x_2 следует за состоянием x_1 то полагаем $x_2 \in \Gamma_x(x_1)$. Тем самым определен граф состояний ком-

байна $G_X = (X, \Gamma_X)$ [1]. Аналогично определяются графы состояний автомобиля $G_Y = (Y, \Gamma_Y)$ и поля $G_Z = (Z, \Gamma_Z)$.

Система из трех объектов: комбайна, автомобиля и поля в любой момент времени находится в одном из своих возможных состояний (x_i, y_j, z_k) . Здесь запись (x_i, y_j, z_k) означает, что комбайн находится в состоянии x_i , автомобиль в состоянии y_j и поле в состоянии z_k . В этом случае граф состояний системы $G = G_X \times G_Y \times G_Z$ является произведением исходных графов состояний (более подробно см. [1]).

Граф $G = G_X \times G_Y \times G_Z$ описывает состояние системы для независимо функционирующих элементов. В нашем случае комбайн и автомобиль связаны в своей работе, поэтому некоторые состояния, соответствующие вершинам графа G , являются невозможными для данной системы. Например, состояние (x_1, y_3, z_0) является невозможным, поскольку не может быть ситуации, когда комбайн выгружает зерно в кузов автомобиля, а автомобиль в этот момент разгружается на току. Поэтому надо исключить из рассмотрения невозможные состояния. Обозначим $S \subseteq X \times Y \times Z$ множество всех возможных состояний системы. Отсюда получаем, что *граф возможных состояний* системы G_s , изображенный на рис. 1, является подграфом графа состояний G , т.е. $G_s = (S, \Gamma|_S)$, где Γ – отображение графа G .

Очевидно, что весь уборочный процесс интерпретируется как переход системы из состояния (x_0, y_0, z_0) в состояние (x_4, y_6, z_1) .

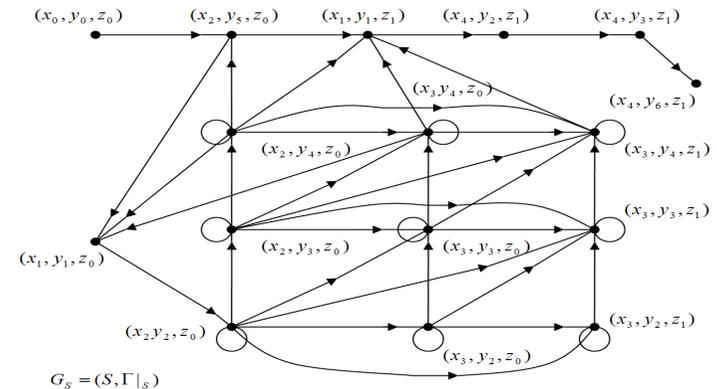


Рис. 1. Граф возможных состояний системы

Переход комбайна в состояние ремонта является случайным событием, поэтому нахождение системы в любой момент времени в одном из ее возможных состояний также является случайным событием. Время перехода комбайна в состояние ремонта является случайной величиной с известным законом распределения.

Решение задачи об определении вероятностей нахождения системы в своих возможных состояниях в произвольный момент времени t хорошо известно и описано в теории марковских цепей (см. [2]).

Граф возможных состояний системы не позволяет получить наглядную информацию о развитии системы во времени. Может возникнуть необходимость знать: в каком состоянии находится система в произвольный момент времени или проследить траекторию развития системы. Для этого необходимо «развернуть» во времени граф возможных состояний.

Для построения дискретной развертки во времени нам потребуется понятие упорядоченного произведения графов.

Вначале введем операцию дизъюнктивной суммы (см. [2]) $\bigvee_{i \in I} X_i$

семейства множеств X_i . Именно, по определению

$$\bigvee_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times X_i.$$

В частности, $A \vee B = (\{1\} \times A) \cup (\{2\} \times B)$. При дизъюнктивном сложении, в отличие от операции объединения, не отождествляются одинаковые элементы множеств.

Упорядоченным произведением (см. [2]) \otimes графов G_1, G_2, \dots, G_n с одинаковым числом вершин назовем граф (\tilde{X}, \tilde{U}) , множество вершин \tilde{X} и множество дуг \tilde{U} которого определяется из условий:

$$1) \tilde{X} = \bigvee_{i=1}^{n+1} X_i, \quad (X_i = \{i\} \times X)$$

$$2) \tilde{U} = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n,$$

множества дуг U_i определяются отображениями

$$\Gamma_i : X \rightarrow X, \quad i = \overline{1, n}$$

соответственно.

Если $G_1=G_2=\dots=G_n=G$, то граф \tilde{G} называется n -й степенью графа G и обозначается через $\tilde{G}^{(n)}$.

Граф $\tilde{G}_S^{(n)}$ представляет собой «развертку» в дискретном времени $t_k=kt$ ($k=0,1,\dots,n$) графа G_S возможных состояний системы так, что любой путь графа G_S изображается в виде простого пути l на графе $\tilde{G}_S^{(n)}$, причем движение вдоль пути l проходит в направлении возрастания времени t_k ($k=0,1,\dots,n$).

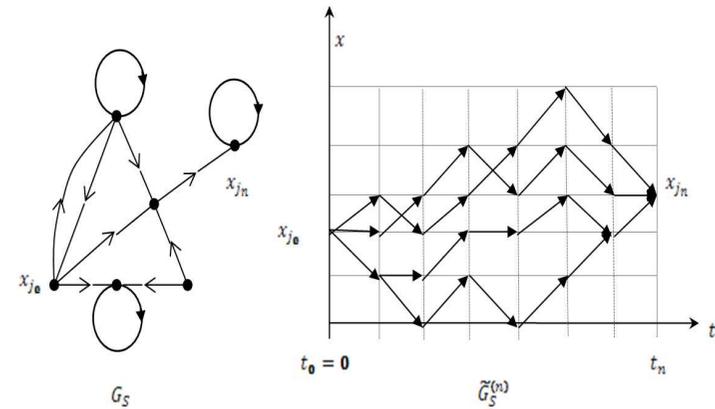


Рис. 2. Граф и его развертка во времени

На рис. 2 изображены графы G_S , $\tilde{G}_S^{(n)}$ ($n=7$) и множество путей длины $n=7$ из вершины x_{j_0} в вершину x_{j_n} . Граф $\tilde{G}_S^{(n)}$ естественно назвать дискретным пространством-временем (x,t) , в котором происходит движение системы S . Тогда пути l на графе $\tilde{G}_S^{(n)}$ – это дискретные траектории движения системы S в пространстве-времени.

Библиографический список

1. Степовой Д.В. Декомпозиция математических моделей многоуровневых технологических систем на ориентированных графах // Доклады Российской академии сельскохозяйственных наук. – 2011. – №3.
2. Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов: учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1976.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЭКСПЛУАТАЦИИ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ НА АВТОМОБИЛЬНОМ ТРАНСПОРТЕ

Д.Л. Поправка, Н.В. Нелюбин, В.В. Бокатов

Кубанский государственный технологический университет,
г. Краснодар, Россия

При моделировании процессов эксплуатации систем электроснабжения находят широкое применение марковские (полумарковские) случайные процессы, позволяющие исследовать процесс изменения состояния только одного объекта (изделия) системы, представляемого с точки зрения системного подхода как единое целое. В качестве таких объектов могут рассматриваться одна составная часть изделия, конкретное изделие или система электроснабжения в целом. При этом предполагается, что изменение состояния объекта исследования происходит в результате действия, с одной стороны, деградиционных факторов в виде отказов, неисправностей, процессов старения, а с другой стороны, управляющих воздействий восстановления технического состояния объекта и применения его по назначению. Предполагается также, что при этом объект системы может находиться только в одном из состояний описываемого процесса.

Однако при эксплуатации систем электроснабжения реализуются взаимосвязанные процессы изменения физического состояния объектов, информационные процессы управления эксплуатацией объектов системы. Поэтому для комплексного моделирования процессов эксплуатации систем электроснабжения необходимо исследовать изменение каждого эксплуатируемого объекта системы с учетом изменения состояния других взаимосвязанных с ним объектов, а также одновременно с реализуемыми информационными процессами и процессами управления эксплуатацией объектов системы.

Известный математический аппарат марковских (полумарковских) случайных процессов с позиции системного подхода является однообъектным и поэтому не может быть применен для моделирования случайных процессов изменения состояния множества взаимосвязанных объектов различной природы физических, информационных и управления.

В связи с этим необходим новый научно-методический подход к моделированию процессов эксплуатации систем электроснабжения. Основными положениями такого подхода являются:

1. Для полного моделирования процесса эксплуатации систем электроснабжения необходимо одновременно и совместно рассматривать процессы изменения состояния множества объектов системы, а также реализуемы при этом информационные процессы и процессы управления.

2. Для описания процесса изменения состояния каждого из рассматриваемых объектов применяются однообъектные марковские случайные процессы в соответствии с известными подходами и методами их реализации.

3. Каждый однообъектный случайный процесс, описывающий изменение состояния одного из рассматриваемых объектов, взаимосвязан с другими однообъектными процессами.

4. Для установления взаимосвязи между однообъектными случайными процессами вводятся логические условия пребывания каждого объекта системы в одном из состояний в зависимости от состояний других объектов.

5. Логические условия взаимосвязи однообъектных случайных процессов реализуются следующим образом: объект может находиться в заданном состоянии или изменять свое состояние, с одной стороны, в зависимости от заданных условий пребывания в соответствующем состоянии, а с другой стороны, в зависимости от взаимодействия с другими взаимосвязанными объектами при нахождении их в заданном состоянии или при изменении этого состояния.

6. Для выявления структурно-функционального положения каждого рассматриваемого объекта системы выделяются уровни физических, информационных процессов и процессов управления.

7. Модель взаимосвязанного многоуровневого многообъектного процесса эксплуатации системы электроснабжения представляет собой множество.

Способ эксплуатации по фактическим результатам применения целесообразно внедрять для составных частей системы: отказы которых не влияют существенным образом на применение системы по назначению; обладающих высокой эксплуатационной технологичностью, в том числе легкосъемностью, доступностью, взаимозаменяемостью; для которых стоимость восстановительных работ не превышает затрат на проведение профилактических мероприятий.

Применение планово-предупредительного способа эксплуатации ограничивается составными частями системы: имеющими тенденцию к росту параметров потока отказов (интенсивности отказов) после определенной наработки; техническое состояние которых характеризуется совокупностью параметров, для каждого из которых зависимость математического ожидания от времени имеет явно выраженную направленность к убыванию (возрастанию), а дисперсия достаточно мала.

Внедрение комбинированного способа эксплуатации возможно как для создаваемых систем, так и для систем электроснабжения, находящихся в эксплуатации. Экономическая целесообразность проведения мероприятий по внедрению комбинированного способа эксплуатации оценивается на основе применения коэффициента целесообразности внедрения путем

сопоставления величины затрат на проведение мероприятий по внедрению комбинированного способа и последующую эксплуатационную с суммарным эффектом при применении системы по назначению.

Внедрение комбинированного способа эксплуатации позволяет повысить эффективность применения систем электроснабжения по назначению и снизить суммарные расходы на создание и эксплуатацию систем за счет оптимальной организации составных частей и системы в целом.

СТРУКТУРА КОМБИНИРОВАННОГО СПОСОБА ЭКСПЛУАТАЦИИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА АВТОМОБИЛЬНОМ ТРАНСПОРТЕ

Д.Л. Поправка, Н.В. Нелюбин, В.В. Бокатов

Кубанский государственный технологический университет,
г. Краснодар, Россия

Совершенствование современных технических систем, реализация новых конструкторско-схемных решений при создании перспективных технических систем, возрастание требований к высокой экономичности их эксплуатации требует соответствующего совершенствования системы эксплуатации и разработки новых форм и методов ее организации. На основании проведенного анализа существующих способов эксплуатации АТ сложных технических систем сделан вывод, что каждому из способов эксплуатации присущи свои условия и порядок применения, ни один из способов не избавлен от недостатков, следовательно, их применение для изделий в целом не позволяет устранить противоречие между возросшим объемом эксплуатационных мероприятий и требованием обеспечения высокой экономичности эксплуатации технических систем. Повышение эффективности эксплуатации изделий возможно только при разработке принципиально нового подхода к организации системы эксплуатации технических систем, заключающегося в разработке и применении комбинированного способа эксплуатации (КСЭ).

В составе изделий выделены следующие три группы составных частей:

составные части, эксплуатируемые по фактическому техническому состоянию (ФТС);

составные части, эксплуатируемые плано-предупредительным способом (ППС);

составные части, эксплуатируемые по фактическим результатам применения (ФРП).

Обосновано, что для изделия в целом необходимо применять КСЭ, сущность которого характеризуется следующими основными положениями:

1. КСЭ представляет собой оптимальное сочетание частных способов эксплуатации составных частей технической системы.
2. Способы эксплуатации составных частей изделий по ФРП, ППС и ФТС являются частными способами эксплуатации.

Поскольку в состав изделия могут входить различные составные части, то существенным образом отличается и порядок эксплуатации в целом.

На рис. 1 – 3 приведены различные варианты формирования КСЭ для сложных технических систем.

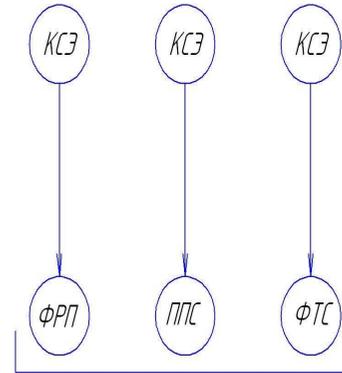


Рис. 1. Формирование КСЭ одного частного способа эксплуатации

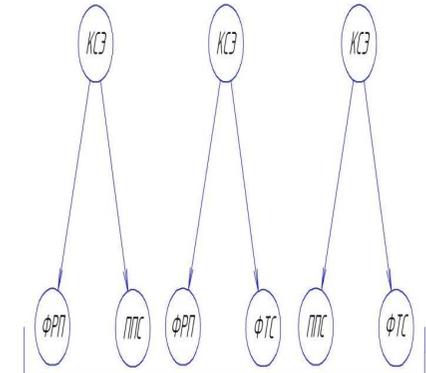


Рис. 2. Формирование КСЭ из двух частных способов эксплуатации

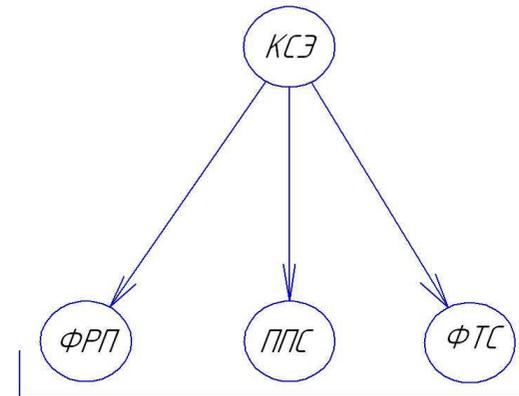


Рис. 3. Формирование обобщенного КСЭ

Внедрение КСЭ позволяет повысить эффективность применения сложных технических систем по назначению и снизить суммарные расходы на создание и эксплуатацию изделий за счет оптимальной организации эксплуатации составных частей и изделия в целом.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ КООРДИНАТ ЦВЕТА

Е.В. Прозорова, В.А.Соловьев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Координаты цвета X, Y, Z определяются в соответствии с обобщенной зависимостью

$$A = k_1 \int_{\lambda} \varphi(\lambda) \bar{d}(\lambda) \tau(\lambda) d\lambda = k_1 \sum_{i=1}^{N_A} \varphi(\lambda_i) \bar{d}(\lambda_i) \tau(\lambda_i) \Delta\lambda + k\Delta A, \quad (1)$$

где A – одна из координат цвета X, Y, Z ; $\bar{d}(\lambda)$ – одна из функций сложения цветов стандартного наблюдателя для соответствующей координаты цвета; ΔA – погрешность численного интегрирования.

При разработке метода аттестации рабочих эталонов цвета возникает вопрос, как связана погрешность измерения координат цвета X, Y, Z с отдельными составляющими погрешностей спектрофотометрических измерений, которые можно разделить на две части. Погрешности фотометрической шкалы: систематическая $\Delta_c(\tau)$; неисключенная систематическая $\theta(\tau)$; случайная $\Delta^0(\tau)$. Погрешности шкалы длин волн: систематическая $\Delta_c(\lambda)$; неисключенная систематическая $\theta(\lambda)$; случайная $\Delta^0(\lambda)$.

Далее будем считать, что погрешность измерения координат цвета состоит из случайных и неисключенных систематических погрешностей измерения спектральных коэффициентов пропускания или отражения, реализация которых носит случайный характер, а также погрешности численного интегрирования.

Согласно свойству линейной функции случайной аргументов дисперсия координат цвета будет [1]:

$$\begin{aligned}
D(X) &= \sum_{i=1}^{N_X} d_i D(\tau_i) + 2 \sum_{i=1}^{N_X} d_i d_j k_{ij} \sqrt{D(\tau_i)D(\tau_j)}, \\
D(Y) &= \sum_{i=1}^{N_Y} b_i D(\tau_i) + 2 \sum_{i=1}^{N_Y} b_i b_j k_{ij} \sqrt{D(\tau_i)D(\tau_j)}, \\
D(Z) &= \sum_{i=1}^{N_Z} c_i D(\tau_i) + 2 \sum_{i=1}^{N_Z} c_i c_j k_{ij} \sqrt{D(\tau_i)D(\tau_j)},
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$d_i = k_1 \varphi(\lambda_i) \bar{x}(\lambda_i) \Delta \lambda; \quad b_i = k_1 \varphi(\lambda_i) \bar{y}(\lambda_i) \Delta \lambda; \quad c_i = k_1 \varphi(\lambda_i) \bar{z}(\lambda_i) \Delta \lambda;$$

$D(\tau_i)$ – дисперсия случайной погрешности измерения.

Коэффициент корреляции между аргументами τ_i и τ_j равен [2]

$$k_{ij} = \frac{\sum_{j \neq i} \tau_i \tau_j - \frac{(\sum_{i=1}^m \tau_i)(\sum_{j=2}^N \tau_j)}{m}}{\sqrt{[\sum_{i=1}^m (\tau_i - \bar{\tau}_i)^2][\sum_{j=2}^N (\tau_j - \bar{\tau}_j)^2]}}, \tag{3}$$

где $\bar{\tau}_i, \bar{\tau}_j$ – среднее значение из m измерений τ_i и τ_j соответственно.

Корреляция между погрешностями измерений может возникнуть в тех случаях, когда имеется одновременное влияние дополнительных источников погрешностей. Если корреляция отсутствует, то дисперсия и оценка дисперсии координат цвета равна:

$$\begin{aligned}
D(X) &= \sum_{i=1}^{N_X} d_i^2 D(\tau_i); \quad D(Y) = \sum_{i=1}^{N_Y} b_i^2 D(\tau_i); \quad D(Z) = \sum_{i=1}^{N_Z} c_i^2 D(\tau_i); \\
S(X) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{N_X} d_i^2 S^2(\tau_i)}; \quad S(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_Y} b_i^2 S^2(\tau_i)}; \quad S(Z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_Z} c_i^2 S^2(\tau_i)}.
\end{aligned} \tag{4}$$

При условии постоянства оценки дисперсии на всех длинах волн оценка дисперсии координат цвета будет [3]:

$$S(X) = S(\tau) \sqrt{\sum_{i=1}^{N_X} d_i^2}; \quad S(Y) = S(\tau) \sqrt{\sum_{i=1}^{N_Y} b_i^2}; \quad S(Z) = S(\tau) \sqrt{\sum_{i=1}^{N_Z} c_i^2}; \tag{5}$$

Приведенное значение дисперсии координат цвета будет

$$k(X) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_X} d_i^2}}{\sum_{i=1}^{N_X} d_i}; \quad k(Y) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_Y} b_i^2}}{\sum_{i=1}^{N_Y} b_i}; \quad k(Z) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_Z} c_i^2}}{\sum_{i=1}^{N_Z} c_i}, \tag{6}$$

Используя формулы (6), определены теоретические значения коэффициентов $k(X)$, $k(Y)$, $k(Z)$ для различных источников излучения, которые приведены в табл. 1.

Таблица 1

Расчетные коэффициенты

	Тип источника излучения			
	A	B	C	D ₆₅
k(X)	0,28	0,26	0,25	0,25
k(Y)	0,26	0,26	0,26	0,26
k(Z)	0,34	0,34	0,36	0,36

Расчетные коэффициенты, полученные теоретически, были подтверждены экспериментальными исследованиями на математической модели. Для этого были выбраны цветные стекла [2], рассчитаны для них спектральные коэффициенты пропускания по формуле

$$\tau_x(\lambda_i) = 10^{-\sum_{i=1}^m k(\lambda_i)L_i},$$

где $k(\lambda_i)$ – спектральный коэффициент поглощения i -го стекла на длине волны λ_i ; L_i – толщина i -го стекла; m – число стекол в наборе.

Выражения для $\tau_y(\lambda_i)$ и $\tau_z(\lambda_i)$ аналогичны.

Для этих стекол рассчитывались координаты цвета, которые были приняты за истинные значения. Затем, используя генератор случайных чисел, изменялась случайная погрешность спектральных коэффициентов пропускания $-\Delta^0 \leq \Delta\tau_i \leq \Delta^0$ и вычислялись координаты цвета, включающие случайную погрешность измерения (измеренные значения координат цвета). Для них были найдены усредненные коэффициенты $k(X)$, $k(Y)$, $k(Z)$, которые приведены в табл. 2.

Таблица 2

Усредненные коэффициенты

	Источник света			
	A	B	C	D ₆₅
k(X)	0,27	0,25	0,24	0,25
k(Y)	0,26	0,26	0,27	0,27
k(Z)	0,35	0,36	0,36	0,36

Как следует из табл. 1 и 2, значения коэффициентов $k(X)$, $k(Y)$, $k(Z)$, полученные теоретически и на математической модели, согласуются друг с другом с погрешностью 4%.

Библиографический список

1. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики. Для технических приложений. – М.: Наука, 1969.
2. Петровский Г.Т. Цветное оптическое стекло и особые стекла. Каталог. – М., 1990.
3. МИ 2083-90 ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОРОДНОСТИ
ВРЕМЕННОГО РЯДА ВОЛЬФА***

М.А. Бондаренко

Институт математики СО РАН им. С.Л. Соболева,
г. Новосибирск, Россия

Число Вольфа для данного дня вычисляется по формуле

$$W = k(f + 10g),$$

где k – нормировочный коэффициент, f – количество наблюдаемых пятен, g – количество наблюдаемых групп пятен. Для исследования однородности временного ряда, образованного числами Вольфа, временной интервал с 1875 по 2010 был разбит на 13 отрезков величиной, примерно 11 лет, где 0-вой интервал соответствует временному интервалу 1879–1886 и т.д. Начало каждого интервала было выбрано в соответствии с началом 11-летнего солнечного цикла. Таким образом, каждый интервал содержал примерно 4015 значений.

Далее для каждого интервала вычислялась временная задержка τ различными методами для каждого интервала. На рис. 1 представлен график зависимости выбора величины временной задержки при использовании метода взаимной информации.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00105 а) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный интеграционный проект СО РАН – 2012 – №14).

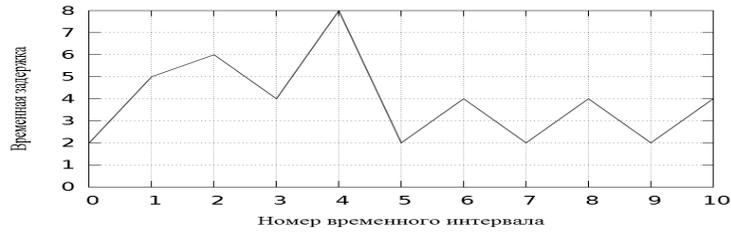


Рис. 1. График зависимости выбора величины временной задержки при использовании метода взаимной информации

Для оценки фрактальной размерности аттрактора динамической системы обычно используют алгоритм Грассберга-Прокаччия, позволяющий вычислить корреляционную размерность D_2 множества F по выборке точек $x_{i,i=1,M}$ из этого множества. Пусть множество F покрыто ячейками одинакового размера ε , а вероятность того, что выбранная наугад точка выборки попадёт в i -й элемент покрытия, равна p_i . Тогда корреляционная размерность определяется соотношением

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}.$$

Величину $C(\varepsilon)$ называют корреляционным интегралом и вычисляют так:

$$C(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|),$$

где $\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

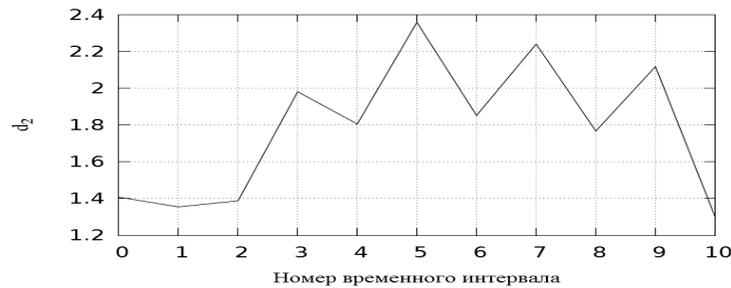


Рис.2. График зависимости корреляционной размерности от выбранного временного интервала

Заклучение

Оценка размерности аттрактора динамической системы, порождающей числа Вольфа, методами теории хаотических динамических систем показывает наличие периода в 22 года.

Библиографический список

1. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // *Physica D.* – 1983. – Vol. 9. – P. 189.
2. Lorenz E.N. Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues // *Journal of the Atmospheric Sciences.* – 1969. – Vol. 26, no. 4. – P. 636
3. Sugihara G. Nonlinear forecasting for the classification of natural time series // *Philosophical Transactions of the Royal Society: Physical and Engineering Sciences (1990–1995).* – 1994. – Vol. 348, no. 1688. – Pp. 477 – 495.
4. Jing Hu, Jianbo Gao and Xingsong Wang, Multifractal analysis of sunspot time series: the effects of the 11-years cycle and Fourier truncation // *J. of statistical mechanics: Theory and experiment.* – 2009. – V. 2. – P. 1 – 20.

CRITICAL PHENOMENA ON FRACTAL LATTICES*

A.N. Bondarenko*, A.Y. Gunkin**

* Sobolev Institute of Mathematics,
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
** Novosibirsk State Technical University,
Novosibirsk, Russia

1. High-temperature expansion for magnetic susceptibility of Ising model

It is known that the magnetic susceptibility for the Ising model is defined by the following equation

$$\frac{\chi}{kT} = \frac{\partial^2}{\partial H^2} \left(\frac{\ln(Z_N)}{N} \right), \quad (1)$$

where the partition function Z_N is given by

$$Z_N(\nu, \tau) = (\cosh \beta J)^{2N} (\cosh \beta H)^N \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + \nu \sigma_i \sigma_j) \prod_k (1 + \tau \sigma_k). \quad (2)$$

* This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 11-01-00105 a) and Interdisciplinary Integration Project of SB RAS No. 14, "Inverse Problems and Applications: Theory, Algorithms, and Programs".

Here $\nu = \tanh(\beta J)$, $\tau = \tanh(\beta H)$, $\beta = \frac{1}{kT}$, J characterizes the magnetic moments interaction, H and T are the external magnetic field and the absolute temperature respectively. With the transition to the thermodynamic limit and using a Taylor series expansion at $\tau = 0$, we obtain

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N(\nu, \tau) = \ln Z(\nu) + \frac{1}{2} \tau^2 \chi(\nu) + \dots, \quad (3)$$

where $\chi(\nu)$ is the magnetic susceptibility at zero external magnetic field. We obtain

$$\chi(\nu) = 1 + \sum_{r \geq 1} d_r \nu^r, \quad (4)$$

with

$$d_r = \sum_{g \in G_r} 2\Gamma(g) W_r(g). \quad (5)$$

Here G_r is the set of non-closed graphs of length r ; $W_r(g)$ is a graph weight; $\Gamma(g)$ is the number of graph embeddings into the infinite fractal lattice per one site.

2. Fabio method

The number of embeddings $G(l)$ of a graph in the lattice stage l is given by

$$G(l) = (b^2 - m)G(l-1) + H(l-1), \quad (6)$$

with

$$H(l-1) = H_1(l-1) + H_2(l-1). \quad (7)$$

Where $H_1(l-1)$ and $H_2(l-1)$ represent the number of embeddings that cross, respectively, one and more than one intersection between the reproductions of the $(l-1)$ stage at the l th lattice stage.

It is possible to show that

$$H_1(l-1) = bH_1(l-2) + (b-1)C_1, \quad (8)$$

$$H_2(l-1) = H_2(l_0) = C_2, \quad (9)$$

Iterating (6) up to l_0 , we obtain

$$G(l) = A(b^2 - m)^l + Bb^l + C, \quad (10)$$

with A, B, C are functions of $[C_1, H_1(l_0), H_2(l_0), G(l_0)]$. In particular, Eq. (10) is also valid for the number of sites $N(l)$ at each stage l (with constants A', B', C').

The density of a particular graph in the infinite fractal lattice is then

$$g = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{G(l)}{N(l)} = \frac{A}{A}. \quad (11)$$

From (11) it is possible to obtain the exact evaluation of the n th order of the series by considering all the contributions of graphs with n bonds.

Consider the graph, which represents a line segment. Then in (6), it will be counted twice, each time embedding is located on the border between neighboring iterations blocks. There are $[b(b-1) - (m+1)m]$ such boundaries at each stage, also the graph can be placed right on the border $b^{l-1}+1$ -size times, where *size* is its length. Hence, the correction for (6) looks as follows:

$$G(l) = (b^2 - m)G(l-1) + H(l-1) - [b(b-1) - (m+1)m] \times [b^{l-1} + 1 - \text{size}]. \quad (12)$$

In this case, $H_1(l) = H(l)$, $C_1 = 0$. Iterating up to l_0 we obtain

$$A = \frac{1}{(b^2 - m)^{l_0}} \left\{ G(l_0) + \frac{H_1(l_0) - \text{sign}H_1(l_0) \times [b(b-1) - m(m-1)] \times [\text{size} - 1]}{b^2 - b - m} \right\} + \frac{1}{(b^2 - m)^{l_0}} \left\{ \frac{\text{sign}H_1(l_0) \times [b(b-1) - m(m-1)] \times [\text{size} - 1] - [b(b-1) - m(m-1)] \times [b^{l-1} + 1 - \text{size}]}{b^2 - m - 1} \right\}. \quad (13)$$

Note that in (9), equation $H_2(l-1) = H_2(l_0) = \text{const}$ is not valid for those graphs that «go around the central hole». This graph is observed only at the stage l_0+1 and at the following stages is not preserved due to the increased size of the hole. Therefore

$$G(l) = (b^2 - m - \delta(l_0 + 1))G(l-1) + H(l-1). \quad (14)$$

If one thinks of this formula in the form of (12), the coefficient A takes the following form:

$$A = \frac{1}{(b^2 - m)^{l_0}} \left[G(l_0) + \frac{G(l_0)}{b^2 - m} + \frac{H_1(l_0) + C_1}{b^2 - b - m} + \frac{H_2(l_0) - C_1}{b^2 - m - 1} \right], \quad (15)$$

And H_2 should be reduced by one.

Conclusion

In this paper we show that high-temperature expansion coefficients of the magnetic susceptibility of the Ising model for infinite fractal lattices can be obtained by using a combinatorial Fabio method. Examples of graphs for fractal lattices, for which the formulas proposed in the Fabio method are not correct, were considered. For these cases, the corresponding equations have been obtained. The correctness of the results was tested by a modified nu-

merical Monte Carlo algorithm, as well as with data published in the literature [2].

References

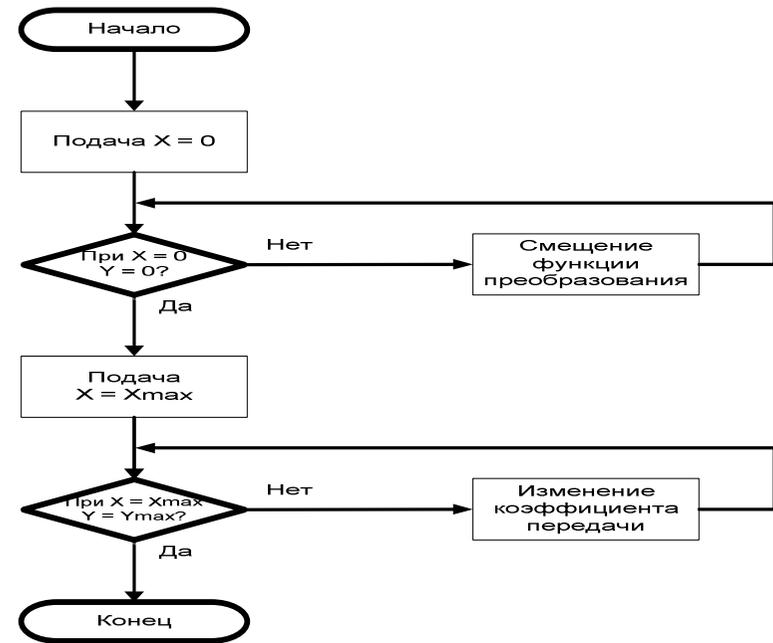
1. Bondarenko A.N., Seleznev V.A., Harbanova E.V. Spectral asymptotics of fractal lattices and the problem of determining the degree of fatigue // Scientific. Vestn. Novosibirsk. Tech. University. – Novosibirsk. 2003. – No.2: Mesolevel mathematical models. – P. 97 –106.
2. Bonnier B. Leroyer Y. Myers C. High-temperature expansions on Sierpinski carpets // Phys. Rev.. 1989. – Vol. 40. – №13. – P. 8961 – 8966.
3. Fabia Aarao Reis D.A., Riera R. High-temperature series expansion for Ising-like systems on fractals // Phys. Rev. 1994. – Vol. 49. – №4. – P. 2579 – 2587.

АЛГОРИТМ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАДУИРОВКИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ДАТЧИКА ДАВЛЕНИЯ

П.П. Першенков, К.В. Иванов

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Большинство современных датчиков физических величин и измерительных устройств требует предварительной установки нуля и калибровки. Эти операции могут осуществляться вручную или автоматически, что предпочтительнее, и обязательно в цифровых измерительных системах (ЦИС). В настоящее время быстро развиваются разработка и создание интеллектуальных датчиков, в состав которых входят микропроцессор или микроконтроллер. В связи с этим весьма актуальным и практически значимым представляется разработка цифрового алгоритма калибровки датчиков физических величин и соответствующих измерительных устройств. В докладе рассматривается разработанный авторами алгоритм калибровки датчиков давления, используемых в цифровом вакуумметре.



Блок-схема алгоритма градуировки ИД давления

Предполагается использовать термопарный и ионизационный датчики давления для разных диапазонов измерения, совместно с микроконтроллером серии PIC32 на основе ядра MIPS32. Преимуществами данной модели являются низкое энергопотребление, высокая производительность, широкие функциональные возможности. Программирование осуществлялось на языке C с использованием компилятора CCS-PICC. Блок-схема алгоритма градуировки представлена на рисунке.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В.С. Глуценков, Н.А. Архипова

Самарский государственный университет путей сообщения,
г. Самара, Россия

На практике для прогнозирования деформационных свойств вновь разрабатываемых композиционных материалов широко используются

зависимости эффективных (макроскопических) модулей деформации матричных композиционных материалов от концентрации наполнителей. В работе приводится сравнение результатов расчёта по полученным соотношениям с расчётами по известным соотношениям Кернера и Исаи [1] и Ванина [2].

Зависимости Кернера и Исаи имеют вид: $E^* = E_m \frac{E_1 A_k + B_k}{E_m A_k + B_k}$,

$$E^* = E_m c \left(\frac{n}{n-1} - c^{1/3} \right)^{-1}. \text{ Здесь } B_k = \frac{1-c_1}{15(1-\nu_m)}, A_k = \frac{c_1}{(7-5\nu_m)E_m + (8-10\nu_m)E_1},$$

c_1 – объёмная концентрация включений, E_1 , E_m , E^* – модуль деформации материала включений, модуль деформации материала матрицы и эффективный модуль деформации соответственно, $n = E_1 / E_m$, ν_m – коэффициент Пуассона материала матрицы. Формулы Ванина здесь не приводятся в силу их громоздкости.

Модуль деформации будем вычислять по известному соотношению $E^* = \frac{9K^* \mu^*}{3K^* + \mu^*}$, где K^* , μ^* — эффективные модули объёмной и сдвиговой деформации соответственно, которые будем находить из соотношений [3] для матричных композиционных материалов с шаровыми включениями [4]:

$$\mu^* = \mu_m + \frac{\sum_{s=1}^n (\mu_s - \mu_m) c_s \alpha_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \alpha_s}, K^* = K_m + \frac{\sum_{s=1}^n (K_s - K_m) c_s \gamma_s}{c_m + \sum_{s=1}^n c_s \gamma_s}, \quad (1)$$

$$\alpha_s = \frac{1}{1 + \frac{2}{15} \frac{4-5\nu_m}{(1-\nu_m)} \frac{(\mu_s - \mu_m)}{\mu_m}}, \gamma_s = \frac{1}{1 + \frac{1+\nu_m}{3(1-\nu_m)} \frac{(K_s - K_m)}{K_m}}.$$

Здесь μ^* , μ_m , μ_s , K^* , K_m , K_s – сдвиговые и объёмные модули деформации (эффективные, материала матрицы и материала включений соответственно), c_m , c_s – объёмные концентрации материала матрицы и включений, $s = 1, 2, \dots, n$.

На рис. 1–2 приведено сравнение результатов расчёта относительного модуля деформации по формулам Кернера, Исаи, Ванина и с использованием формул (1) на примере эпоксидного полимера, наполненного стеклянными шариками.

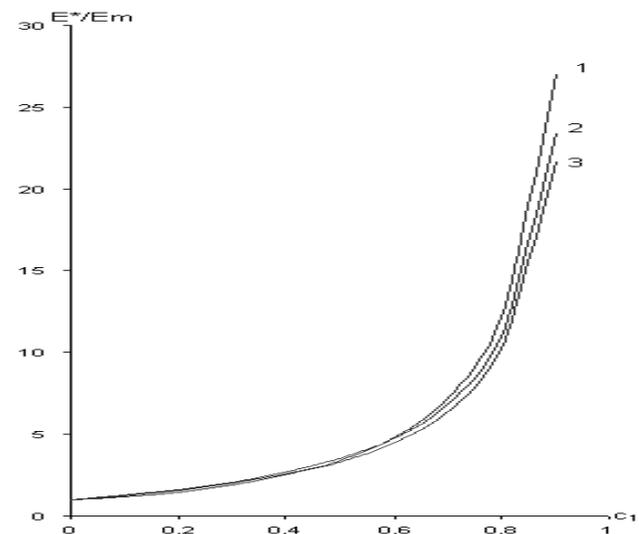
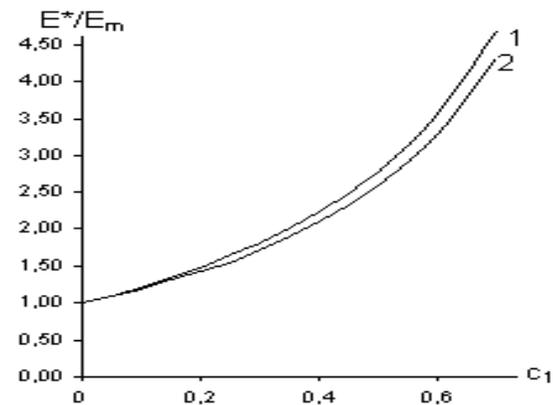


Рис. 1. Зависимости относительного модуля деформации эпоксидного полимера от объёмного содержания стеклянных шариков:
 1 – расчёт по формулам Кернера; 2 – расчёт по формулам Исаи;
 3 – расчёт по формулам (1)

Из рис. 1 – 2 видно, что использование соотношений (1) даёт, как и соотношения Кернера, Исаи и Ванина, довольно точное приближение эффективного модуля деформации композиционного материала с одним наполнителем.



*Рис. 2. Зависимости относительного модуля деформации эпоксидного полимера от объёмного содержания стеклянных шариков:
1 – расчёт по формулам (1); 2 – расчёт по формулам Ванина*

Следует отметить, что применяемые в прогнозировании деформационных свойств композиционных материалов теоретические и эмпирические зависимости в основном предполагают, что наполнителем являются частицы одного материала, а соотношения (1) позволяют находить эффективные деформационные модули многокомпонентных композиционных материалов.

Библиографический список

1. Мэнсон Дж., Сперлинг Л. Полимерные смеси и композиты. – М.: Химия, 1979. – 440 с.
2. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наук. Думка, 1985 – 302 с.
3. Сараев Л.А., Глушечков В.С. Неупругие свойства многокомпонентных композитов со случайной структурой. – Самара: Изд-во Самарского ун-та. – 2004. – 164 с.
4. Глушечков В.С., Кильдюшов А.П. Упругие свойства многокомпонентных пористых композиционных материалов // Вестник СамГТУ. – 2006. – №46 Сер. Технические науки. – С. 194 – 195.

ОСОБЕННОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЯЗЫКЕ FORTRAN

Ю.Ф. Захарова, Ю.А. Бозгалева

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Применение параллельных вычислительных систем является стратегическим направлением развития вычислительной техники. Это обстоятельство вызвано не только принципиальным ограничением максимально возможного быстродействия обычных последовательных ЭВМ, но и практически постоянным наличием вычислительных задач, для решения которых возможностей существующих средств вычислительной техники всегда оказывается недостаточно.

Fortran – язык программирования, занимающий лидирующее положение в сферах решения научно-технических задач и математической обработки числовых данных.

Гордостью Fortrana всегда была богатая коллекция самых разнообразных библиотек, и прежде всего математических. Исходные тексты подобных библиотек одновременно служат отличным подспорьем при изучении численных методов и алгоритмов, а также при разработке собственных. Одна из наиболее известных и популярных библиотек – IMSL фирмы Visual Numerics – включает свыше тысячи процедур математической и статистической обработки данных и фактически является стандартом на самых различных компьютерных платформах.

Одной из наиболее актуальных проблем развития Fortran является разработка языковых средств, ориентированных на параллельную обработку данных.

В Fortran 90/95 содержится большой набор таких средств работы с массивами и секциями массивов как с целыми объектами, позволяющих неявно описывать параллелизм действий над компонентами массива или нескольких массивов. С их помощью можно в сжатой форме представить алгоритмы обработки массивов, благодаря чему компилятор сгенерирует эффективный код с учетом особенностей аппаратуры. В Fortran 95 были введены и отдельные новые средства, полезные для параллельной обработки.

Хотя стандарты Fortran 90/95 содержат некоторые средства поддержки параллельности, их нельзя считать полностью параллельными языками, поскольку параллельное выполнение программы должно осуществляться в соответствии с ее потенциальным параллелизмом, явно описанным пользователем с помощью специальных директив или параллельных конструкций. Метод автоматического распараллеливания, даже усиленный указаниями о распределении данных, имеет очень существенный и принципиальный недостаток – отсутствие явной (и ясной) модели параллельного выполнения не позволяет предоставить пользователю удобные средства анализа поведения его программы и повышения эффективности ее выполнения. Для описания потенциального параллелизма программы вполне естественно использовать средства, предложенные в стандарте PCF Fortran в результате обобщения огромного опыта, полученного при работе на многопроцессорных ЭВМ с разделяемой памятью.

Для иллюстрации особенности параллельных вычислений на языке Fortran в ходе данной работы было рассмотрено сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта следующего вида:

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, \xi) \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (1)$$

где действительные функции $a(x)$, $f(x)$, $N(x, \xi)$ и искомая $\varphi(x)$ удовлетворяют условию Гёльдера, причем $N(x, \xi)$ по обоим переменным.

Данное интегральное уравнение можно также записать в часто используемой эквивалентной форме:

$$a(x)\varphi(x) - \frac{b(x)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi-x}{2} \varphi(\xi) d\xi + \int_0^{2\pi} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x),$$

где

$$N(x, x) = -b(x), \quad \frac{1}{2\pi} [N(x, \xi) - N(x, x)] \operatorname{ctg} \frac{\xi-x}{2} = K(x, \xi).$$

Уравнение

$$a(x)\varphi(x) - \frac{b(x)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\xi-x}{2} \varphi(\xi) d\xi = f(x)$$

называется характеристическим уравнением, соответствующим полному уравнению (1). Решение данного уравнения будем искать в виде полинома вида

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k t^k.$$

Предположим для определенности, что контур интегрирования L представляет собой единичную окружность на комплексной плоскости с центром в начале координат. Применяя к рассматриваемому уравнению метод коллокации, получим систему уравнений следующего вида:

$$a(t_j) \sum_{k=-n}^n c_k t_j^k + \frac{b(t_j)}{\pi i} \sum_{k=-n}^n c_k \int_L \frac{\tau^k}{\tau - t_j} d\tau = f(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, 2n.$$

Пользуясь формулами Коши и формулами Сохоцкого, эту систему можно свести к системе уравнений следующего вида:

$$a(t_j) \sum_{k=-n}^n c_k t_j^k + b(t_j) \sum_{k=0}^n c_k t_j^k - b(t_j) \sum_{k=-n}^{-1} c_k t_j^k = f(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, 2n.$$

которую будем решать методом сопряженных градиентов, поскольку основной операцией данного метода является умножение матрицы на вектор, а именно эта операция допускает высокую степень параллелизации.

В ходе работы был выполнен сравнительный анализ результатов вычислений по времени и точности при использовании стандартных

средств параллелизации вычислений языка Fortran с результатами, полученными при написании заведомо параллельной программы «с нуля».

Библиографический список

1. Васильченко В.В. FORTRAN. Программирование Windows-приложений на языке FORTRAN. Элементы управления и графика Windows. – М.: Диалог-МИФИ, 2006. – 400 с.
2. Артемов И.Л. Fortran. Основы программирования: – СПб.: Диалог-МИФИ, 2007. – 304 с.
3. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. – СПб.: Лань, 2010. – 352 с.

ОСОБЕННОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ВИДЕОКАРТАХ

Ю.Ф. Захарова, О.А. Баулина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Первые попытки использования графических процессоров для математических расчётов были сделаны ещё в 90-х годах прошлого века. Самые первые попытки такого применения были крайне примитивными и ограничивались использованием некоторых аппаратных функций, таких, как растеризация и Z-буферизация.

В 2003 г., с появлением эволюционировавших шейдеров, была достигнута новая планка – на этот раз выполнение матричных вычислений. Это был год, когда целая секция SIGGRAPH ("Computations on GPUs/ Вычисления на GPU") была выделена под новую область информационных технологий. Эта ранняя инициатива получила название GPGPU (General-Purpose computation on GPU, универсальные вычисления на GPU). Наиболее известен BrookGPU – компилятор потокового языка программирования Brook, созданный для выполнения неграфических вычислений на GPU.

Технология CUDA – это программно-аппаратная вычислительная архитектура NVIDIA, основанная на расширении языка C, которая даёт возможность организации доступа к набору инструкций графического ускорителя и управления его памятью при организации параллельных вычислений. CUDA помогает реализовывать алгоритмы, выполнимые на графических процессорах видеоускорителей GeForce восьмого поколения и старше (серии GeForce 8, GeForce 9, GeForce 200), а также Quadro и Tesla.

Основные преимущества CUDA по сравнению с предыдущими методами GPGPU вытекают из того, что эта архитектура спроектирована для эффективного использования неграфических вычислений на GPU и использует язык программирования C, не требуя переноса алгоритмов в удобный для концепции графического конвейера вид. CUDA предлагает новый путь вычислений на GPU, не использующий графические API, предлагающий произвольный доступ к памяти (scatter или gather).

Такая архитектура лишена недостатков GPGPU и использует все исполнительные блоки, а также расширяет возможности за счёт целочисленной математики и операций битового сдвига.

При этом сами программы пишутся на "расширенном" C, их параллельная часть (ядра) выполняется на GPU, а обычная – на CPU. CUDA автоматически осуществляет разделением частей и управлением их запуском. CUDA использует большое число отдельных нитей для вычислений, часто каждому вычисляемому элементу соответствует одна нить. Все нити группируются в иерархию – сетка/блок/нить.

Верхний уровень – сетка – объединяет все нити, выполняющие данное ядро. Представляет собой одномерный или двумерный массив блоков. Каждый блок – это одно/двух/трехмерный массив полностью независимых взаимодействующих между собой нитей. Блок соответствует независимо решаемой подзадаче. При этом нити внутри блока могут взаимодействовать между собой через общую память функцию синхронизации всех нитей блока. Нити из разных блоков не могут между собой взаимодействовать.

Поэтому исходная задача разбивается на ряд подзадач, каждая из которых решается абсолютно независимо при помощи набора взаимодействующих между собой нитей и в произвольном порядке. Нити фактически выполняют одну и ту же команду, но каждая со своими данными.

Для иллюстрации особенностей параллельных вычислений на видеокартах в данной работе была рассмотрена краевая задача Деришле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2) \quad \text{в } D\{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\},$$

$$u(0, x_2) = \gamma_1(x_2), \quad u(1, x_2) = \gamma_2(x_2),$$

$$u(x_1, 0) = \gamma_3(x_1), \quad u(x_1, 1) = \gamma_4(x_1).$$

которая решалась методами Якоби и Гаусса-Зейделя. Для обоих методов на видеокarte использовалась как глобальная память, так и разделяемая (кэшируемая, выбирались блоки 16x16). Во втором случае вычисления осуществляются намного быстрее, что не противоречит теории. Парал-

тельно осуществлялась попытка реализации вычислений с помощью текстурной памяти – она по сути является глобальной, но допускает кэширование и должна быстро работать. Однако в данном случае возникает проблема в том, что в текстурную память нельзя записывать промежуточные результаты, поэтому на самой видеокарте итерации прокрутить невозможно. Для решения данной проблемы каждый цикл ставился на процессоре компьютера и, каждый раз переписывая данные, считался на видеокарте. Но, как показала практика, на это затрачивается намного больше времени из-за копирования данных.

Критерием окончания вычислительного процесса являлось выполнение определенного наперед заданного числа итераций. Погрешность вычислений в этом случае оценивалась тремя способами: 1) как разность между двумя соседними итерациями, 2) как разность между точным и приближенным решением, поскольку для модельной задачи известно точное решение, 3) как разность между 2-мя соседними итерациями, но по формулам с дополнительными переменными. В ходе работы был выполнен сравнительный анализ результатов вычислений во всех трех случаях для обоих методов и всех трех типов памяти.

Библиографический список

1. Боресков А.В., Харламов А.А. Основы работы с технологией CUDA. – М., 2010.
2. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений // Бинном. Лаборатория знаний, Интернет-университет информационных технологий, 2007.
3. <http://habrahabr.ru/blogs/cuda/54707/>
4. <http://www.ixbt.com/video3/cuda-1.shtml>

**5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НАНОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И НАНОСТРУКТУР**

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО
ТРАНСПОРТА В НАНОПРОВОЛОКАХ
НА ОСНОВЕ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ**

А.Н. Голиков

Таганрогский государственный педагогический институт
им. А.П. Чехова,
г. Таганрог, Россия

Разработка высокоскоростных полевых транзисторов на основе GaAs нанопроволок является перспективным направлением развития наноэлектроники и невозможна без предварительного компьютерного моделирования ключевых физических процессов [1]. Широко используемый метод Монте-Карло требует для своей устойчивости тщательного подбора весовых функций, что не всегда возможно, так как в процессе моделирования приходится оперировать не самими подынтегральными функциями, а их аппроксимациями. Поэтому актуальна задача создания компьютерных вычислительных схем, инвариантных относительно аппроксимируемых функций и конструктивно не зависящих от входных данных физической модели.

Ниже описывается самосогласованное моделирование электрон-фононного рассеяния в нелегированной GaAs нанопроволоке в предположении теплового равновесия, с учётом столкновительного уширения подзон энергии, их непараболичности и влияния механизмов рассеяния друг на друга [1].

По методу Галёркина приближённо решалась самосогласованная система уравнений Шрёдингера и Пуассона:

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\Delta + \varphi + V_{xc} \right) \psi_n(x, y) = E_n \psi_n(x, y), \\ \nabla^2 \varphi(x, y) = -8\pi \rho_c(\psi(x, y)), \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями $\psi_n(x, y)|_{aG} = 0$, $\varphi(x, y)|_{aG} = 0$, где

$\rho_c(x, y) = \sum_{k=0}^{N_{sub}-1} n_k |\psi_k(x, y)|^2$, E_n – n-я подзона энергии, V_{xc} – обменно-корреляционный потенциал по Хедину-Лундквисту,

$$\eta(E) = \frac{\sqrt{2m^*}}{\pi\hbar\sqrt{E - E_i}} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_i - E_F}{k_B T}\right)}, \quad n_i = \int_{E_i}^{\infty} \eta(E) dE. \quad (2)$$

С целью приближённого вычисления интеграл (2) представлялся в виде $n_i \approx \int_{\varepsilon_i}^{\tilde{E}} \eta(E) dE + \int_{\tilde{E}}^{E_{\max}} \eta(E) dE$, где \tilde{E} – априори заданное значение, ε_i , E_{\max} – переменные пределы, итеративно приближающиеся к E_i и к бесконечности соответственно, пока изменения значений интегралов на текущем шаге не станут меньше априори заданной величины $\delta\tilde{n}$. На каждой итерации отрезок интегрирования покрывался системой подынтервалов, на каждом из которых $\eta(E)$ аппроксимировалась полусуммой полиномов Ньютона для интерполирования вперёд и назад с приведением последней при помощи матричной схемы из [2] к виду $P_{k,N} = \sum_{i=0}^N B_{k,i} t^i$, где k – номер подынтервала. В таком виде $P_{k,N}$ применялся для аппроксимации первообразной от $\eta(E)$, интеграл на каждой итерации приближался суммой интегралов от $P_{k,N}$ по всем подынтервалам.

Приближённые решения системы (1) искались в виде: $\psi_n(x, y) \approx \sum_{i=1}^{N_{terms}} p_{n,i} \phi_i(x, y)$, $\phi(x, y) \approx \sum_{i=1}^{N_{terms}} v_i \phi_i(x, y)$, где N_{terms} априори задано.

Система (1) приводилась к виду

$$\begin{cases} \mathbf{Cp} = \mathbf{Ip}, \\ \mathbf{Av} = \mathbf{f}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\mathbf{Cp}=\mathbf{Ip}$ – полная проблема собственных значений, $\mathbf{Av}=\mathbf{f}$ – система линейных алгебраических уравнений, \mathbf{I} – единичная матрица, векторы-столбцы \mathbf{p} , \mathbf{v} содержат коэффициенты $p_{n,i}$, v_i , элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{f} суть двойные интегралы по области совпадающей с поперечным сечением нанопроволоки [3].

Двойные интегралы приближались также по кусочно-полиномиальной схеме, при этом область интегрирования $G = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ разбивалась на прямоугольные непересекающиеся подобласти, каждая из которых дробилась своей диагональю

ещё на две треугольные. В каждой треугольной подобласти строился интерполирующий полином Ньютона, который с применением схемы из [2] приводился к виду

$$P_k(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} A_{k,i,j} t^i u^j. \quad (3)$$

Полином (3) применялся для приближения двойных интегралов по каждой подобласти, сумма таких интегралов приближала искомые двойные интегралы [3].

На базе описанного численного подхода за счёт снижения абсолютной погрешности вычисления интеграла (2), а значит, и правой части уравнения Пуассона из (1), а также за счёт более точного вычисления элементов матриц **A**, **C**, **f** удалось за 27 самосогласованных итераций снизить невязки волновых функций, потенциала Хартри, электронной плотности и уровней энергии до 10^{-18} . При использовании аппроксимаций обменно-корреляционного потенциала отличных от аппроксимации Хедина-Лунд-квиста наблюдалось незначительное (менее 5%) изменение уровней энергии и уменьшение минимума потенциала Хартри на 15%.

Использование описанного подхода для вычисления интегралов перекрытия [1] и схемы на основе сортировки [2] для решения нелинейных алгебраических уравнений позволило снизить абсолютную погрешность приближения уширения подзон энергии до 10^{-18} , а также уточнить пиковые значения скоростей электрон-фононного рассеяния в рамках модели [1].

Библиографический список

1. Borzdov A.V., Pozdnyakov D.V., Galenchik V.O., Borzdov V.M., Komarov F.F. Self-consistent calculations of phonon scattering rates in GaAs transistor structure with one-dimensional electron gas // *Phys. Stat. Sol. (b)*. – 2005. – Vol. 242. – № 15. – pp. 134 – 136.
2. Ромм Я. Е. Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II // *Кибернетика и системный анализ*. – Киев, 2007. – № 2. – С. 161 – 174.
3. Голиков А.Н. Самосогласованный расчёт электрон-фононного рассеяния в нанопроволоках на основе кусочно-полиномиальных схем / ТГПИ. – Таганрог, 2011. – 123 с. Деп в ВИНТИ № 488-В2011.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИИ В ОДНОМЕРНОЙ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ СРЕДЕ В РАМКАХ ПЕРКОЛЯЦИОННОГО ПОДХОДА

В.А. Найданова, В.С. Байдышев, В.Н. Удодов

Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова,
г. Абакан, Россия

В связи с развитием нанотехнологий низкоразмерные системы интенсивно изучаются [1]. Экспериментально обнаружены квазиодномерные структуры, в которых наблюдается явление одномерной диффузии [1-2], например, в одномерных нанореакторах, которые обеспечивают диффузию реагирующих компонентов лишь вдоль одного из направлений, они активно используются при получении одномерных нанобъектов – наностержней и нановолокон.

Рассматривается задача компьютерного моделирования аномальной диффузии в пространственно неупорядоченных конденсированных одномерных средах в области фазового перехода в рамках перколяционного подхода, учитывающего конечные диффузионные прыжки между ближайшими узлами модели. Теория перколяции является одной из реализаций модели (решетки) Изинга [2 – 4].

В качестве модели одномерной неоднородной среды была рассмотрена цепочка из N узлов на прямой, расположенных друг от друга на одинаковом расстоянии [2]. Узлы могут быть двух типов: целые и заблокированные. Количество целых узлов задается вероятностью p (p – вероятность найти целый узел). Целые и заблокированные узлы по цепочке распределяются случайным образом. Два целых узла связаны, если между ними количество заблокированных узлов подряд меньше R , где $R=1, 2, 3, \dots$. Число R называется радиусом протекания. В работе проведены расчеты для радиуса протекания до 10. Совокупность связанных узлов образует кластер [2, 4]. При больших значениях p в модели все узлы связаны, то есть существует соединяющий кластер. Порог протекания p_c – максимальная доля целых узлов, при которой нет соединяющего кластера [4].

Моделировалась система с вероятностью целых узлов $p=p_c(1+0.05)$, находящаяся выше порога протекания. За единицу времени частица может совершить один прыжок, по целым узлам прыжки частицы возможны, по заблокированным узлам – нет. Длина прыжка в межузельных расстояниях ограничена радиусом протекания; считалось, что прыжки с любой разрешенной длиной равновероятны [4].

Для моделирования действия поля генерировалось случайное число из отрезка $[0,1]$. Если это число попадало в интервал $[0, 0.5-\alpha]$, то прыжок

совершался в отрицательном (влево) направлении. Аналогично выбирается положительное (вправо) направление, если случайное число попадает в интервал $(0.5-\alpha, 1]$, где α – параметр анизотропии, пропорциональный напряженности поля [3, 4] и связанный с температурой [3, 4]

$$\alpha \propto \frac{E}{T}.$$

С увеличением параметра анизотропии растет вероятность выбора положительного направления, что соответствует движению по цепочке вправо. На цепочке вводились периодические граничные условия [4].

Модель позволяет рассчитать коэффициент диффузии

$$D = \frac{\langle x^2(t) \rangle}{t},$$

где $\langle x^2(t) \rangle$ – среднеквадратичное смещение частицы за время t , подвижность

$$\mu \propto \frac{\langle x(t) \rangle}{\alpha t}.$$

В отсутствие поля (т.е. при $\alpha=0$) средний коэффициент диффузии остается постоянной величиной при любом радиусе протекания, то есть диффузия нормальна.

При наличии поля (т.е. при $\alpha>0$) наблюдается линейная зависимость коэффициента диффузии от времени, с увеличением радиуса протекания значение коэффициента диффузии увеличивается. На малых временах ($t<1000$) подвижность убывает с течением времени, на больших временах подвижность становится постоянной, при любом радиусе протекания.

Таким образом, в рамках перколяционной модели при произвольном радиусе протекания в неоднородной одномерной среде реализуется обычная диффузия в отсутствие поля и полевой аномально быстрый дрейф при периодических граничных условиях (цепочка замкнута в кольцо). Степень структурной неоднородности (радиус протекания) качественно не влияет на основные закономерности процесса диффузии и дрейфа. Модель применима к описанию проводимости полупроводников при низких температурах [2 – 4].

Библиографический список

1. Гусев А.И., Ремпель А.А. Нанокристаллические материалы. – М.: Физматлит, 2001. – 224 с.

2. Белашенко Д.К. Механизмы диффузии в неупорядоченных системах (компьютерное моделирование) // УФН. – 1999. – Т. 169. – № 4. – С. 361 – 384.

3. Архинчеев В.Е., Баскин Э.М. Аномальная диффузия и дрейф в гребешковой модели перколяционных кластеров // ЖЭТФ. – 1991. – Т. 100. – Вып. 1(7). – С. 292 – 300.

4. Мартыненко М.В., Удодов В.Н., Потекаев А.И. Транспорт частиц с переменной длиной прыжка в одномерной конденсированной среде // Вестник Томского государственного университета. – 2001. – Т. №272. – С. 31 – 34.

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ СВЯЗИ В ПРЕПОДАВАНИИ ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ*

А.А. Фильченков

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации
Российской академии наук (СПИИРАН),
Санкт-Петербургский государственный институт (СПбГУ),
г. Санкт-Петербург, Россия

1. Введение. Федеральные государственные образовательные стандарты, действующие на территории Российской Федерации, подчеркивают важность междисциплинарных связей в организации учебного процесса и реализации учебных программ [1]. Это общее положение, в частности, применяется к дисциплинам образовательного цикла высшего профессионального образования в области математики и информатики. Описанная ситуация выдвигает необходимые требования к насыщению материала лекционных, семинарских и особенно практических занятий объектами, находящимися на стыке двух и более дисциплин.

Одним из удачных примеров подобных объектов, основанных на широких междисциплинарных связях, являются алгебраические байесовские сети (АБС) [2–3], которые выступают формальной моделью представления систем знаний с неопределенностью, относящейся к классу логико-вероятностных графических моделей. АБС определяется как совокупность фрагментов знаний, математической моделью которых выступает идеал конъю-

* Исследования, в рамках которых получены публикуемые результаты, частично поддержаны РФФИ, проекты №№ 09-01-00861-а, 12-01-00945-а.

юнктов с заданными на его элементах оценками вероятности их истинности (набор таких фрагментов знаний называется первичной структурой) и взаимосвязей между ними. АБС позволяют поддерживать непротиворечивость сети и осуществлять логико-вероятностный вывод. Как самообучающиеся модели, АБС позволяют синтезировать первичную и прочие структуры. Теория АБС использует понятия и методы целого ряда дисциплин (теория вероятности, математическая статистика, логика и вероятностная логика, линейная алгебра, экстремальные задачи, теория графов, информатика, теория сложности), применение которых будет последовательно рассмотрено в работе.

2. Теория вероятности. АБС представляют знания с неопределенностью, для формализации которой используется вероятностная мера. Следует подчеркнуть, что оценки истинности в АБС могут быть интервальными, то есть используется аппарат внешней и внутренней меры вероятности истинности.

3. Математическая статистика. Обучение АБС (формирование вероятностных оценок на основе статистических данных) осуществляется с использованием методов математической статистики.

4. Вероятностная логика. В теории АБС используется логико-вероятностный подход (Дж. Буль) в форме, предложенной Н. Нильссоном; в его рамках в качестве меры истинности утверждений используется вероятностная мера.

5. Линейная алгебра. Для формализации локального логико-вероятностного вывода в АБС используется язык матрично-векторного исчисления, в том числе прямые операторные произведения и степени матриц (степени Кронекера).

6. Экстремальные задачи. Поддержание локальной непротиворечивости и осуществление локального логико-вероятностного вывода сводятся к решению одной или серии задачи линейного и дробно-линейного программирования.

7. Теория графов. Вторичная структура АБС представляет собой граф. Поэтому все алгоритмы, связанные с АБС в целом (поддержание непротиворечивости, глобальный логико-вероятностный вывод), используют теорию графов. Она же применяется для исследования свойств графов смежности – объектов, выступающих в роли математической модели вторичной структуры. Методы теории графов используются для обучения вторичной структуры.

8. Информатика. Реализация АБС в комплексе программ поднимает вопросы представления данных в программном коде. Актуальны вопросы представления как элементов первичной структуры, так и вторичной, а также прочих, связанных с ней структур.

9. Теория сложности. Теория АБС содержит систему алгоритмов, связанных как с логико-вероятностным выводом и поддержкой непротиворечивости, так и с обучением и синтезом различных глобальных структур. Сравнение различных вариантов алгоритмов и их оптимизация требуют обращения к понятиям и методам теории сложности.

10. Заключение. Как было показано, алгебраические байесовские сети основываются на методах значительного числа дисциплин из области математики и компьютерных наук, что делает их привлекательными с точки зрения преподавания. Следует обратить внимание, что в зависимости от преследуемых в курсах целей некоторые из используемых в теории АБС аппаратов могут не затрагиваться. Подобная гибкость позволяет включать АБС в преподавание группам студентов, различающихся по уровню подготовки и профессиональной ориентации.

Более десяти лет теория АБС читается на базе математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета студентам старших курсов специальностей «Прикладная информатика» и «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», а также студентам первых двух курсов, специализирующихся в чистой математике [4].

Преподавание теории АБС облегчается наличием доступных материалов: учебных пособий [5–6], монографий [2–3, 7] и статей, доступных в сети Интернет, например [8–9].

Библиографический список

1. Федеральные государственные образовательные стандарты. URL: <http://standart.edu.ru>. (Доступ 04.05.2012.)
2. Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В. Байесовские сети: логико-вероятностный подход. – СПб.: Наука, 2006. – 607 с.
3. Тулупьев А.Л., Сироткин А.В., Николенко С.И. Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. – 400 с.
4. Тулупьев А.Л. Основы теории алгебраических байесовских сетей: программа спецкурса для студентов старших курсов и аспирантов. – СПб.: СПбГУ, 2007. – 7 с.
5. Тулупьев А.Л. Алгебраические байесовские сети: локальный логико-вероятностный вывод: учеб. пособие. – СПб.: СПбГУ; Анатолия, 2007. – 80 с. (Сер. Элементы мягких вычислений).
6. Тулупьев А.Л. Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод в деревьях смежности: учеб. пособие. – СПб.: СПбГУ; Анатолия, 2007. – 40 с. (Элементы мягких вычислений).

7. Тулупьев А.Л. Байесовские сети: логико-вероятностный вывод в циклах. – СПб.: СПбГУ, 2008. – 140 с. (Элементы мягких вычислений.)

8. Фильченков А.А., Тулупьев А.Л. Анализ циклов в минимальных графах смежности алгебраических байесовских сетей // Труды СПИИРАН. – 2011. – Вып. 2 (17). – С. 151–173.

9. Фильченков А.А., Тулупьев А.Л. Третьичная структура алгебраической байесовской сети // Труды СПИИРАН. – 2011. – Вып. 3 (18). – С. 164–187.

ДИСЦИПЛИНА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ» КАК ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ ГЕОМЕТРИИ

Е.Г. Романова, Л.Д. Романова

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В последнее время часто говорят о приоритете фундаментальности образования в контексте уровня образованности и культуры, как конкретного человека, так и общества в целом. Как следствие, фундаментализация предметной подготовки студентов достаточно долго остается одним из приоритетных направлений высшего образования. Поэтому, как нам представляется, с целью фундаментализации образования в новый Федеральный государственный образовательный стандарт третьего поколения направления подготовки 010500 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» по изучению дисциплины «Геометрия и топология» была включена новая составляющая дисциплина «Вычислительная геометрия» [1].

В связи с этим потребовалась корректировка учебного плана дисциплины, но так, чтобы, с одной стороны, сохранилась преемственность изучения геометрии в учебном процессе, с другой стороны, введение новой составляющей позволило бы приобрести студентам более глубокую фундаментальную подготовку по курсу. При этом посредством изучения соответствующих математических теорий, алгоритмов и структур данных на конкретном языке программирования предполагается добиться формирования фундаментальных знаний в области геометрии и информатики. Например, при изучении алгоритмов построения выпуклой оболочки изучаются основы выпуклой геометрии, при изучении алгоритмов триангуляции повторяются основы моделирования плоских объектов и т.д.

Авторы строят *содержание* дисциплины таким образом, чтобы она была направлена на изучение основ вычислительной геометрии и алго-

ритмов решения стандартных задач с целью формирования не только знаний, но и умений и навыков к самообразованию в течение всей жизни.

Основным содержанием дисциплины является исследование и оценка сложности геометрических построений, анализ и оценка эффективности алгоритмов для решения прикладных задач.

Целью изучения данной дисциплины является: приобретение навыков по геометрическому моделированию, решению разнообразных инженерно-технических задач с учетом специфики профессиональной подготовки; умение изображать формы кривых линий на основе интерполяции и аппроксимации с использованием современных компьютерных технологий [2].

Учитывая вышеизложенное, в рамках дисциплины «Вычислительная геометрия» должны изучаться следующие разделы курса:

алгоритмы построения выпуклых оболочек и триангуляции;

решение прикладных задач с использованием прямоугольной и треугольной сеток;

задачи, связанные с кривыми и поверхностями на плоскости и в пространстве;

алгоритмы компьютерной графики.

Студенты, изучившие дисциплину, должны

знать:

основные понятия вычислительной геометрии; алгоритмы триангуляции; кривые Безье; B-сплайны; интерполяция эрмитовыми кривыми; сглаживание с помощью кривых Безье;

уметь:

моделировать геометрические объекты; строить линии уровня; решать задачи сглаживания кривых и поверхностей; строить алгоритмы выпуклых оболочек; проверять попадание внутрь выпуклых и невыпуклых фигур;

владеть методами:

геометрического поиска; линейного программирования; геометрии треугольников и прямоугольников; моделирования кривых и поверхностей.

Результатом освоения курса является приобретение основных знаний в области вычислительной геометрии, овладение основными методами решения задач и их приложений.

Библиографический список

1. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 010500 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем (квалификация (степень) «бакалавр»)».

2. Грызлов А.А. Примерная программа дисциплины «Вычислительные задачи геометрии» для специальности 511200 «Математика. Прикладная математика». – Ижевск, 2007.

**ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ
ПРИ ПОДГОТОВКЕ БАКАЛАВРОВ ПО НАПРАВЛЕНИЮ
«ПРОГРАММНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ»**

Т.В. Черушева, А.А. Пашкин

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

Основная особенность подготовки студентов по направлению 231000 «Программная инженерия» в Пензенском государственном университете – это сочетание фундаментальной математической подготовки и современной техники программирования. В программной инженерии часто используют линейные операторы. Они служат, например, для преобразования координат некоторого тела. Способность изображать пространственный объект является основой для понимания формы этого объекта. Кроме того, во многих случаях важна способность вращения, переноса и построения проекций объекта. Для исследования формы объекта требуется вращать его, перемещать и т.д. Поэтому программисты должны владеть навыками работы с линейными операторами, чтобы в дальнейшем грамотно представлять полученные результаты.

В программе курса «Алгебра и геометрия» рассматривается тема **«Преобразование координат в двумерном и трёхмерном пространстве»**.

Известно, что в двумерном пространстве матрица преобразования точки с координатами (x, y) выглядит так: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. После умножения исходных координат на матрицу преобразования, новые координаты примут вид $(x \cdot a + y \cdot c, x \cdot b + y \cdot d)$. Поворот вокруг начала координат на произвольный угол θ задается матрицей оператора $X^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Обратное преобразование – с помощью матрицы

$X^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Тогда поворот в двумерном пространстве на угол 90° в положительном направлении задаётся матрицей оператора $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, на 180° – $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, на 270° – $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, поворот на 0° или 360° осуществляется с помощью оператора тождественного преобразования $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Особое место в преобразованиях координат занимают отражения и масштабирования. Отражение относительно оси абсцисс получается с помощью оператора $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а относительно оси ординат – с помощью оператора $T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отражение относительно прямой $y = x$ осуществляется с помощью матрицы оператора $T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Величина масштабирования определяется значением элементов исходной диагональной матрицы. При матрице $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, в которой $a=d$, $b=c=0$, выполняется пропорциональное масштабирование; если $a \neq d$, $b=c=0$, то масштабирование будет проведено непропорционально. Зависимость от элементов a и d : если a, d больше (меньше) единицы, то происходит растяжение (сжатие) объекта.

Перейдём к преобразованиям в трёхмерном пространстве. Точка в трёхмерном пространстве представляется четырёхмерным вектором $[x \ y \ z \ 1]$. Матрицу преобразования можно разделить на четыре

отдельные части: $\begin{pmatrix} & & & \vdots & 3 \\ 3 & \times & 3 & \vdots & \times \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & 1 \\ 1 & \times & 3 & \vdots & 1 \times 1 \end{pmatrix}$ Матрица размерности (3x3) осу-

ществляет линейное преобразование в виде изменения масштаба, сдвига и вращения, размерности (1x3) производит перенос, (3x1) – преобразования в перспективе, а скалярный элемент (1x1) выполняет общее изменение масштаба.

Трёхмерный перенос является простым расширением двумерного переноса и задаётся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Dx & Dy & Dz & 1 \end{pmatrix} = T[Dx \quad Dy \quad Dz].$$

Трёхмерное изменение масштаба задаётся матрицей

$$S(Sx, Sy, Sz) = \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общее изменение масштаба получается за счет 4-го диагонального элемента. Такой же результат можно получить при равных коэффициентах частичных изменений масштабов.

Рассмотрим трёхмерный сдвиг и трёхмерное вращение вокруг осей координат. Недиagonальные элементы матрицы размерности (3x3) осуществляют сдвиг в трех измерениях:

$$[x \quad y \quad z \quad 1] * \begin{pmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ h & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [x + yd + hz, bx + y + iz, cx + fy + z, 1].$$

Оператор вращения вокруг оси абсцисс на угол φ имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{вокруг оси ординат} -$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{вокруг оси аппликат} -$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что трёхмерные вращения

некоммутативны.

Таким образом, теория линейных операторов играет важную роль в курсе «Алгебра и геометрия», является фундаментом в образовании бакалавров, обучающихся по направлению 23100 «Программная инженерия», и помогает им овладеть навыками для решения практических задач в дальнейшей профессиональной деятельности.

Библиографический список

1. Постников М.М. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1973.
2. Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А. Геометрия. – СПб.: Лань, 2011.

РЕАЛИЗАЦИЯ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Е.Г. Романова, П.Е. Шуваев

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В связи с переходом к новому Федеральному государственному образовательному стандарту третьего поколения дисциплина «Геометрия и топология», изучаемая студентами направления подготовки 010500 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», дополнилась новой дидактической единицей «Вычислительная геометрия» [1]. В связи с этим возникла необходимость становления курса дисциплины с учетом новых требований. Предполагается дополнить курс новым лабораторным практикумом по вычислительной геометрии. Каждая лабораторная работа выполняется на основе разработанных алгоритмов.

Приведем один из таких алгоритмов решения задачи построения выпуклой оболочки для заданного конечного множества N точек плоскости.

Будем перечислять вершины в порядке обхода против часовой стрелки. Обозначим через (x_1, y_1) координаты правой нижней точки A_1 . Следующей при отборе будет точка $A_2(x_2, y_2)$, обладающая свойством, что все остальные точки лежат слева от вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, т. е. угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1B}$ неотрицателен (против часовой стрелки) для любой точки $B(x, y)$ данного множества. Для этого проверяем условие

$$\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1M} \right] = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} > 0$$

со всеми точками B . Если таких точек несколько, то вершиной искомого многоугольника станет та, для которой длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ будет наибольшей. Будем поступать так и дальше. Предположим, что пройдена i -я вершина A_i выпуклой оболочки. Для следующей точки A_{i+1} произведения $[\overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \overrightarrow{A_iB}]$ неотрицательны, рассматривая в качестве B все остальные точки. Если таких точек несколько, то вновь выбираем ту, для которой длина вектора $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ имеет наибольшую длину. Если для какой-либо точки B выражение меньше нуля, считаем следующей ее и продолжаем проверку остальных точек. Если же значение выражения равно нулю, то сравниваем квадраты длин векторов. Продолжая эту процедуру, мы рано или поздно придем к точке A_1 . Это будет означать, что выпуклая оболочка построена.

Программа решения данной задачи алгоритмом Джарвиса была приведена, например, в [2]. Ее можно несколько упростить, поэтому приведем уточненный вариант реализации указанного алгоритма на языке C. Множество заданных точек находится в массиве a , все точки, принадлежащие выпуклой оболочке, записываются в массив b .

```
void main(){
    printf("enter amount a point ->");
    scanf("%d", &n);
    for(i=0; i < n; i++){
        printf("point %d ->", i+1);
        scanf("%d%d", &(a[i].x), &(a[i].y));
    }
    m = 0;
    for(i = 1; i < n; i++)
        if(a[i].y < a[m].y) m = i; else
        if (a[i].y == a[m].y && a[i].x > a[m].x) m = i;
    b[0] = a[m]; a[m] = a[0]; a[0] = b[0];
    k = 0; min = 1;
    do{
        for(j = 1; j < n; j++)
            if(vect(b[k], a[min], b[k], a[j]) < 0 ||
                (vect(b[k], a[min], b[k], a[j]) == 0 &&
                    dist2(b[k], a[min]) < dist2(b[k], a[j]))) min = j;
        k++;
        b[k] = a[min];
        min = 0;
    }
```

```

        if(b[k].x == b[0].x && b[k].y == b[0].y) break;
    }while(1);
    printf("\nPath: \n");
    for(j = 0; j < k; j++)
        printf("%d %d\n", b[j].x, b[j].y);
    printf("%d %d\n", b[0].x, b[0].y);
    scanf("%d", i);
}

```

Библиографический список

1. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 010500 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем (квалификация (степень) «бакалавр»)».
2. Андреева Е.В. Геометрические задачи на олимпиадах по информатике //Информатика. – 2002. – № 14.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

М.Г. Усатова, Г.С. Итпекова

Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова,
г. Абакан, Россия

С введением в учебный процесс компьютерных технологий становится актуальной проблема накопления и использования цифровых образовательных ресурсов. Целью статьи является обоснование необходимости использования цифровых образовательных ресурсов в процессе обучения математике и составление рекомендаций по их использованию.

Цифровые образовательные ресурсы (ЦОР) – это представленные в цифровой форме фотографии, видеофрагменты, статические и динамические модели, объекты виртуальной реальности и интерактивного моделирования и иные учебные материалы для организации учебного процесса [1, 2].

При изучении имеющихся ресурсов была выделена «Виртуальная математика. Задачи с параметрами». В данном комплекте представлены задачи по алгебре, теория их решения, а также методические рекомендации для учителей и учащихся по использованию представленных материалов в учебном процессе.

Задачи с параметрами являются очень сложными и трудно решаемыми, со стороны учеников. Следует отметить, что линейные уравнения, содержащие параметры, вызывают трудности. Существует много методов

решения задач с параметрами и одним из них является графический подход. ЦОР «Виртуальная математика. Задачи с параметрами» включает в себя обучающую программу-тренажер «Графики Graphics 3.2». Динамические чертежи при решении задач с параметрами позволяют работать с учащимися и в режиме обучения, и в режиме контроля. Большим преимуществом этой программы является то, что она имеет довольно большую собственную базу тестов и учителю нет необходимости создавать тесты самому и терять при этом много времени. Этот ЦОР можно использовать при решении уравнений, неравенств и их систем. Очень эффективно он используется при демонстрации движения графиков, демонстрации их растяжения и сжатия [3]. Если поэкспериментировать, то можно увидеть, что эта довольно простая программа может служить дополнительным средством повышения качества обучения [4].

При использовании ЦОРа «Виртуальная математика. Задачи с параметрами» можно следовать следующим рекомендациям:

1. Данный ресурс используется для изучения алгебраических уравнений, логарифмов и других понятий математики.
2. Ресурс включает готовые тесты, которые позволяют контролировать знания учащихся.
3. С помощью данного ресурса предоставляется возможность для учителя организовать проведение самостоятельных и контрольных работ.
4. Учащиеся имеют доступ к справочным материалам.
5. Система позволяет проверить решения.

Отметим, что программное средство учебного назначения не заменяет учебник, задачник, практикум по решению задач (как и самого учителя), но позволяет дополнить возможности традиционных средств учения богатым визуальным рядом, индивидуализированным тренажером и контролем, моделирующей деятельностью. Благодаря этому обогащаются по сравнению с традиционной методикой иллюстративная и исследовательская линии процесса учения, автоматизируется его тренировочно-контролирующая линия. Как следствие, по ряду показателей облегчается труд учителя при существенной интенсификации работы ученика.

В исследовании нами рассмотрен ЦОР «Виртуальная математика. Задачи с параметрами». На практике с использованием данного ресурса обучающиеся овладели графическим методом решения уравнений с параметрами.

Библиографический список

1. Лонкина Н.В. Использование информационных технологий на уроках математики [Электронный ресурс] // Медиатека. Педсовет: образование, учитель, школа. – Режим доступа: http://pedsovet.org/component/option,com_mtree/task,viewlink/link_id,3565/Itemid,118/

2. Свириденко О.В. Разрешите представить: «Виртуальная математика. Задачи с параметром. 7–11 класс» [Электронный ресурс] // Вопросы интернет-образования. – Режим доступа: http://vio.uchim.info/Vio_98/cd_site/articles/art_3_7.htm

3. Информационные ресурсы и услуги [Электронный ресурс] // Коллекция Федерального центра цифровых образовательных ресурсов. – Режим доступа: <http://fcior.edu.ru>.

4. Информационные ресурсы и услуги [Электронный ресурс] // Электронный журнал – Компьютер школьного учителя математики. – Режим доступа: http://www.valeryzykin.ru/view_journal.php?id=1

ВЛИЯНИЕ УВЕЛИЧЕНИЯ ДОЛИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ НА КАЧЕСТВО ОБУЧЕНИЯ

Н.Ф. Добрынина

Пензенский государственный университет,
г. Пенза, Россия

В последние двадцать лет получило развитие научное направление – математическая психология. Начало этой науки было положено в 1885 г. Х. Эббингаузом. Ученый поставил эксперимент, показавший, что у самых разных людей запоминание и забывание последовательности бессмысленных слогов подчиняется одному и тому же закону. В 80-х годах двадцатого века было установлено, что освоение сложных навыков, например, профессии оператора атомной станции, носит пороговый характер. После того, как затрачены определенные усилия (вложено определенное число часов активной работы на освоение материала), происходит переход на другой уровень, происходит качественный скачок. Количество решенных задач, прослушанных курсов, практических занятий переходит в новое качество знаний и навыков. Тогда из студента рождается специалист.

В статье рассматривается микромодель образования и решается вопрос: какого уровня специалиста следует ожидать в результате перехода высшей школы на бакалавриат и новый способ распределения аудиторной и самостоятельной работы студентов.

Такой анализ можно провести, построив микромодель образования [1]. Многие авторитетные психологи утверждают, что способности людей неплохо описываются гауссовой кривой [2, 3]. Кривая Гаусса применяется в нормальном распределении случайной величины теории вероятности. По оси x откладываем время T в годах полноценной напряженной учебы, необходимой для получения квалификации специалиста или бакалавра. По

оси у откладываем ρ – плотность вероятности получить такого специалиста. Интеграл от функции Гаусса по конечному интервалу определит качество специалиста. Площадь всей кривой равна 1, следовательно, в идеале специалист должен иметь качество обучения, равное 1.

В последние годы наметилась тенденция к увеличению времени самостоятельной работы студентов. Раньше, когда студент обучался 5 лет, на самостоятельную работу выделялось 10% времени обучения. На современном этапе, когда студент обучается 4 года, на самостоятельную работу выделяется до 50% учебного времени. Сравним эти две ситуации и определим качество обучения.

Введем случайную величину X , означающую успеваемость студента в подгруппе. Вероятность выпустить хорошего специалиста вычисляется по формуле

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где Φ – функция Лапласа, $2a$ – время обучения специалиста, равное 5 годам, $\alpha = -2.5$, $\beta = 2.5$. Среднее квадратическое отклонение σ принимает разные значения: в подгруппе отличников $\sigma_1 = 1$, в подгруппе «хорошистов» $\sigma_2 = 1,1$ и в подгруппе «троечников» $\sigma_3 = 1,2$. При выпуске специалистов самостоятельная работа студентов составляла 10% времени обучения. В результате получаем следующую табл. 1.

Таблица 1

№	Успеваемость подгруппы	σ	Качество обучения
1	отличники	1	0,9836
2	хорошисты	1,1	0,9768
3	троечники	1,2	0,9624

Рассмотрим динамику изменения качества обучения внутри каждой подгруппы в зависимости от доли самостоятельной работы в процессе обучения. В табл. 2 представлено качество обучения бакалавров.

Таблица 2

№	Доля самостоятельной работы, в процентах	Качество обучения		
		отличники	хорошисты	троечники
1	10%	0,9426	0,9146	0,8858
2	20%	0,9282	0,8968	0,8664
3	30%	0,9108	0,8788	0,8414
4	40%	0,8904	0,8530	0,8164
5	50%	0,8664	0,8262	0,7888

В результате вычислений приходим к следующим выводам:

1. В результате перехода от специалистов к бакалаврам качество обучения уменьшается: в отличной подгруппе на 11,69%, в хорошей подгруппе на 12,06%, в удовлетворительной подгруппе на 17,36%.

2. С увеличением доли самостоятельной работы в процессе обучения качество обучения также падает, причем больше всего теряет в качестве обучения подгруппа «удовлетворительно» успевающих студентов: 17%.

Результаты исследований подтверждают необходимость увеличить число аудиторных занятий за счет самостоятельной работы, а самостоятельную работу студентов необходимо жестко контролировать.

Библиографический список

1. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. – М.: Изд-во УРСС, 2003. – 288 с.

2. Planning and management of educational development. – Paris: UNESCO, 1990.

3. Pross K.N., ed. Planning the quality of education. – Oxford: UNESCO, 1990.

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В N-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

Т.В. Черушева, Я.А. Алексеева

Пензенский государственный университет,
г.Пенза, Россия

В настоящее время особое значение приобретает наличие у бакалавров и магистров фундаментального образования, на основании которого можно путем самообразования не отставать от новых достижений науки и техники. К ним предъявляются высокие требования. Это и качественное техническое образование, и нестандартное мышление, и владение специальными компьютерными программами, и знание английского языка.

Специфика современного образования состоит в том, что в процессе обучения студенты должны осваивать большой объем дисциплин общеобразовательного и прикладного характера, связанных с их будущей специальностью.

Наиболее перспективным с позиции обеспечения адекватной траектории профессионального становления будущего специалиста является рассмотрение в курсе математики комплекса прикладных и профессионально ориентированных задач, которые устанавливают связи со

специальными дисциплинами, а также иллюстрируют эффективность математических методов. Для бакалавров технических специальностей теория функций комплексного переменного остается практически без внимания. Тем не менее, будущая деятельность выпускников связана с решением целого ряда прикладных задач. Не последнее место здесь имеют конформные отображения. С методической точки зрения предпочтителен такой подход.

Прежде всего даётся классическое определение конформного отображения на плоскости. Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки ω_0 , осуществляемое аналитической функцией $\omega = f(z)$ и обладающее в точке z_0 свойством сохранения углов и постоянством растяжения, называется конформным отображением. Основная задача теории конформных отображений заключается в следующем. Заданы области D и D^* ; требуется построить функцию, осуществляющую конформное отображение одной из этих областей на другую. Условия аналитичности, однолиственности и отличия от нуля производной функции комплексной переменной $f(z)$ являются достаточными условиями конформности отображения, осуществляемого этой функцией. А однолиственность однозначной аналитической функции в области D^* является так же и необходимым условием конформности отображения.

На следующем этапе вводятся общие принципы конформного отображения: принцип взаимно однозначного соответствия; принцип соответствия границ; принцип симметрии. После этого рассматриваются классические примеры конформных преобразований, в том числе преобразование, осуществляемое дробно-линейной функцией.

Далее переходим к рассмотрению конформного отображения в 3-мерном пространстве. Вводится точка $W = x + iy + jz = (p + jr)e^{i\varphi} = R * e^{i\varphi + j\alpha}$; $\alpha = \arctg \frac{r}{p}$; $R = \sqrt{p^2 + r^2}$ и функция $W = f(z)$ и доказывается следующая теорема.

Пусть функция $W = f(v)$ имеет в точке v_0 производную $f'(v_0)$, отличную от нуля и от корней из нуля, то есть $f'(v_0) \neq 0$, $f'(v_0) \neq i \pm j$. Тогда эта функция реализует в точке конформные отображения. Это значит, что при переходе из пространства (v) в пространство (W) касательная к любой гладкой кривой в фиксированной точке v_0 поворачивается на один и тот же угол и имеет один и тот же коэффициент растяжения.

В качестве примера рассматривается отображение, задаваемое дробно-линейной функцией $\omega(v) = \frac{av+b}{cv+d}$, где a, b, c, d – комплексные пространственные переменные, $ad-bc \neq 0$ при $v = -\frac{d}{c}$, $\omega(v) = \infty$.

Проведем преобразование

$$\frac{1}{pe^{i\varphi} + jre^{i\psi}} = \frac{pe^{i\varphi} - jre^{i\psi}}{(pe^{i\varphi})^2 + (jre^{i\psi})^2} = R * e^{iF} + jPe^{i\Theta}.$$

Знаменатель $(pe^{i\varphi})^2 + (jre^{i\psi})^2 = \|v\|^2 e^{i\theta}$,

где

$$\|v\| = \sqrt{p^4 + r^4 + 2p^2r^2 \cos(\psi - \varphi)};$$

$$\sigma = \arctg \frac{p^2 \sin 2\varphi + r^2 \sin 2\psi}{p^2 \cos 2\varphi + r^2 \cos 2\psi}.$$

Таким образом,

$$v_2 = R * e^{iF} + jPe^{i\Theta} = \frac{e^{-i\sigma}(pe^{i\varphi} - jre^{i\psi})}{\|v\|^2} = \frac{e^{i\varphi - j\psi}}{\|v\|},$$

где Ψ – комплексное. Итак, если $v_2 = R \cdot a^{iF + j\Psi}$, то $R = \frac{1}{\|v\|}$; $F = -\varphi$;

$\Psi = -\psi$. Следовательно, лучи в пространстве (v) , идущие под углами φ, ψ , поворачиваются и проходят под углами $-\varphi, -\psi$.

Отображение обладает свойствами инверсии

$$\|(v - v_0)\| \cdot \|v - v_0\| = R_0^2 \text{ – (рисунок).}$$

тично разбросанные по всему кадру. Один из способов борьбы с цифровыми шумами – уменьшение снимка в постобработке, при этом величина шума остается прежней, но в силу меньшего размера изображения цифровой шум становится менее заметным.

Задача ставится так: дана искажённая фотография и база изображений, состоящая из нескольких фотографий хорошего качества. Требуется сравнить данное изображение с базой на поиск совпадений. В данной работе строится математическая модель с использованием метода главных компонент (РСА), который применяется к данным, записанным в виде матрицы X -прямоугольной таблицы чисел размерности $(I \times J)$. Цель РСА – извлечение из зашумлённых данных нужной информации. Суть метода – существенное понижение размерности. Для этого имеющаяся матрица X размерности $(I \times J)$, где I – число образцов (строк), а J – это число независимых переменных (столбцов), заменяется двумя новыми матрицами T и P . Размерность матрицы T меньше $(I \times J)$ за счёт уменьшения числа переменных (столбцов). Число образцов (строк) сохраняется. Если декомпозиция выполнена верно, то матрица T несет в себе столько же информации, сколько её было в матрице X . В методе главных компонент используются новые формальные переменные t_a ($a = 1, \dots, A$), являющиеся линейной комбинацией исходных переменных x_j $j = (1, \dots, J)$ $t_a = p_{a1}x_1 + \dots + p_{aJ}x_J$. С помощью новых переменных матрица X раскладывается в произведение двух матриц: матрицу *счетов* T размерности $(I \times A)$ и матрицу *нагрузок* P размерности $(A \times J)$: $X = TP^T + E = \sum_{a=1}^A t_a p_a^T + E$. Матрица E – это матрица

остатков размерности $(I \times J)$. Новые переменные t_a называются *главными компонентами*. Число столбцов t_a в матрице T и p_a в матрице P равно A , которое называется *числом главных компонент* (РС). Эта величина заведомо меньше числа переменных J и числа образцов I . Важнейшим свойством РСА является *ортогональность* главных компонент. Поэтому матрица T не перестраивается при увеличении числа компонент, к ней просто прибавляется ещё один столбец, соответствующий новому направлению. То же происходит и матрицей P .

РСА-декомпозиция матрицы X является последовательным итеративным процессом, который можно оборвать на любом шаге $a=A$. Получившаяся матрица $\hat{X} = TP^T$ отличается от матрицы X . Разность $E = X - \hat{X}$ называется матрицей остатков. Разница между исходным

вектором и вектором остатков равна $x_i - \hat{x}_i = e_j = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{iJ})$ и образует строку i в матрице E . Величина $v_i = \sum_{j=1}^J e_{ij}^2$ определяет квадрат расстояния между исходным вектором x_i и его проекцией на пространство РС. Чем оно меньше, тем лучше приближается i -ый образец. Эта же величина, деленная на число переменных J , дает оценку дисперсии $d_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J e_{ij}^2$ i -го образца.

Среднее (для всех образцов) расстояние v_0 вычисляется как $v_0 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I v_i$.

Оценка общая (для всех образцов) дисперсии вычисляется так: $D = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I d_i$.

Программа распознавания лиц методом главных компонент работала с базой изображений, подготовленных в научно-исследовательской лаборатории компании Olivetti, в которую входят 400 фронтальных изображений 40 человек. Все изображения в базе полутоновые, с 256 градациями яркости. Размер каждого изображения 92×112 пикселей. Файлы представлены в формате PGM. В ходе работы сначала произвели обучающую выборку. Затем загрузили фотографию с искажением, по которому будет идти сравнение с базой. После этого вычислили базис изображений и посчитали дисперсию для четырех разных случаев. Результаты вычисления приведены в таблице.

Дисперсия, вычисленная между			
базовым изображением и им же, но сильно искажённым	тестируемым искажённым изображением и изображением этого же человека с поворотом головы	тестируемым искажённым изображением и «чужим» изображением из базы данных	тестируемым искажённым изображением и «чужим» изображением из базы данных
81,18356	644,6717	1436,825	2379,33

Наименьшая величина дисперсии достигается при совпадении лиц, а при сравнении лиц двух разных людей она получается в разы больше. Учитывая даже небольшое смещение и искажение фотографии, программа, построенная по методу главных компонент, произвела правильный выбор лица человека по базе с точностью 10^{-3} .

СОДЕРЖАНИЕ

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....3

И.В. Бойков, М.А. Сёмов ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НОВОГО КЛАССА ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ	3
I.V. Boykov, S. Faydaoglu, M. Astanin APPROXIMATE SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS WITH HOMOTOPY METHOD.....	11
И.Л. Сандлер, О.А. Кацюба РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНЫХ ПО ВХОДУ И ВЫХОДУ РАЗНОГО ПОРЯДКА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМЕХАМИ НАБЛЮДЕНИЙ ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ	23
К.В. Глухова, Н.Ю. Кудряшова ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ	26
Т.В. Елисеева, Ю.Ю. Новикова РЕТРОСПЕКТИВНАЯ ЗАДАЧА О СТРУКТУРЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ДВУСЛОЙНОМ ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ СТЕРЖНЕ.....	31
И.А. Алимова, Н.Ю. Кудряшова ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ	34
Н.Ф. Добрынина, Ю.О.Гуськова УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	37
Ю.Ю. Вязовская, И.М. Мойко МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФОКСА НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ	42
А.Н. Тында, В.А. Алякина ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ	45

А.Н. Тында, К.В. Баранова ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫМ ОБОРУДОВАНИЕМ В РАЗВИВАЮЩИХСЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ.....	49
А.Н. Тында, О.А. Гурова АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТЕОРИИ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ.....	54
Е.А. Лизина О СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	58
Н.Ф. Добрынина, О.С. Мартышкина ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	65
С.И. Исаева О ВЫБОРЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОКОЛОЗЕМНОЙ АСТРОНОМИИ.....	68
А.Н. Бондаренко, В.А. Дедок, Л.А. Козинкин, М.П. Токарев ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ РАСSEИВАЮЩИХ ЦЕНТРОВ ПО НАБОРУ ПРОЕКЦИЙ.....	73
Т.В. Елисеева, К.А. Степанцова МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕСЧЕТА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕДАХ.....	76
В.А. Рязанцев К ПРОБЛЕМЕ УСТОЙЧИВОСТИ УРАВНЕНИЙ БУРГЕРСА.....	79
И.В. Бойков, Н.В. Печникова УСТОЙЧИВОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОЛЬТЕРРА С ДВУМЯ ЖЕРТВАМИ И ОДНИМ ХИЩНИКОМ	83
2. ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ И КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ	91
С.Д. Алгазин О ВЫЧИСЛЕНИИ НУЛЕЙ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ.....	91
Ю.С. Семерич, В.Н. Новиков, Р.А. Верхов СЖАТИЕ СИГНАЛОВ ВЕЙВЛЕТАМИ	94

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, ДЕМОГРАФИИ, СОЦИАЛЬНЫХ НАУК	97
К.С. Петелин АНАЛИЗ ПРОЕКТОВ НА СВЯЗАННОСТЬ	97
А.А. Соломаха, К.А. Милова НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РИСКА ОСЛОЖНЕНИЙ У БОЛЬНЫХ С ГНОЙНО-ДЕСТРУКТИВНЫМИ ЗАБОЛЕВАНИЯМИ ЛЁГКИХ ..	100
Сориба Камара ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРСОНАЛОМ НА ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЯХ	103
Д.Ю. Поползин ИССЛЕДОВАНИЕ КОИНТЕГРАЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ ИНФЛЯЦИИ В РОССИИ В ПОСТКРИЗИСНЫЙ ПЕРИОД	108
С.В. Евстратчик, С.Н. Жук БАЙЕСОВСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ АЛЬТЕРНАТИВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧИСЛОВОЙ, НЕТОЧНОЙ И НЕПОЛНОЙ ЭКСПЕРТНОЙ ИНФОРМАЦИИ	112
А.В. Суворова, А.Е. Пашенко ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНО ЗНАЧИМОГО ПОВЕДЕНИЯ ПО ДАННЫМ О ПОСЛЕДНИХ ЭПИЗОДАХ	114
А.А. Азаров, О.Ю. Ванюшичева СИНТЕЗ АГРЕГИРОВАННЫХ ОЦЕНОК ВЕРОЯТНОСТИ РЕАКЦИЙ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ В ОТВЕТ НА СОЦИОИНЖЕНЕРНОЕ АТАКУЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ	117
Ю.Ю. Егорова АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ОЦЕНКА ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ХЕРСТА НА МАЛЫХ ВЫБОРКАХ ДАННЫХ РЫНКА	120

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ	126
Д.И. Васюнин НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДВУХСЛОЙНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ОБРАЗЦА МАТЕРИАЛА	126
Л.А. Сухарев, О.Е. Каледин, А.М. Чекушкина, А.В. Пухкой СОЗДАНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ БАЗЫ ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО СОВЕРШЕНСТВОВАНИЮ СТРУКТУРЫ КРИСТАЛЛОВ КРЕМНИЯ	130
Г.В. Козлов, И.В. Долбин, М.А. Тленкопачев ВЗАИМОСВЯЗЬ ВРЕМЕНИ СВОБОДНОЙ РЕЛАКСАЦИИ И СТРУКТУРЫ МАКРОМОЛЕКУЛЫ ДЛЯ РАСТВОРОВ ДЕНДРИМЕРОВ	133
Х.Ш. Яхьяева, Г.В. Козлов, Г.М. Магомедов МОЛЕКУЛЯРНАЯ МОДЕЛЬ ЭФФЕКТА АУТОГЕЗИИ	136
С.Я. Задера АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ТЕКСТУРЫ АНИЗОТРОПНОГО ДИЭЛЕКТРИКА С ПОЗИЦИЙ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	139
Е.В. Шабунина, М.Е. Шабунин, Д.В. Спирин, В.Н. Удодов ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА К МАГНИТНЫМ ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДАМ	146
А.В. Князьков, Т.В. Семенова МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ КОМПОНЕНТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР	149
Д.В. Степовой, Л.Ю. Шипик ДИСКРЕТНОЕ ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ	152
Д.Л. Поправка, Н.В. Нелюбин, В.В. Бокатов МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЭКСПЛУАТАЦИИ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ НА АВТОМОБИЛЬНОМ ТРАНСПОРТЕ	156

Д.Л. Поправка, Н.В. Нелюбин, В.В. Бокатов СТРУКТУРА КОМБИНИРОВАННОГО СПОСОБА ЭКСПЛУАТАЦИИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА АВТОМОБИЛЬНОМ ТРАНСПОРТЕ	158
Е.В. Прозорова, В.А.Соловьев МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ КООРДИНАТ ЦВЕТА	160
М.А. Бондаренко ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОРОДНОСТИ ВРЕМЕННОГО РЯДА ВОЛЬФА.....	163
A.N. Bondarenko, A.Y. Gunkin CRITICAL PHENOMENA ON FRACTAL LATTICES	165
П.П. Першенков, К.В. Иванов АЛГОРИТМ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАДУИРОВКИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ДАТЧИКА ДАВЛЕНИЯ.....	168
В.С. Глущенко, Н.А. Архипова ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ	169
Ю.Ф. Захарова, Ю.А. Бозгалева ОСОБЕННОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЯЗЫКЕ FORTRAN	172
Ю.Ф. Захарова, О.А. Баулина ОСОБЕННОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ВИДЕОКАРТАХ	175
5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАНОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И НАНОСТРУКТУР	178
А.Н. Голиков КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ТРАНСПОРТА В НАНОПРОВОЛОКАХ НА ОСНОВЕ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ	178
В.А. Найданова, В.С. Байдышев, В.Н. Удодов КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФфуЗИИ В ОДНОМЕРНОЙ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ СРЕДЕ В РАМКАХ ПЕРКОЛЯЦИОННОГО ПОДХОДА.....	181

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ	183
А.А. Фильченков МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ СВЯЗИ В ПРЕПОДАВАНИИ ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ.....	183
Е.Г. Романова, Л.Д. Романова ДИСЦИПЛИНА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ» КАК ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ ГЕОМЕТРИИ	186
Т.В. Черушева, А.А. Пашкин ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРИ ПОДГОТОВКЕ БАКАЛАВРОВ ПО НАПРАВЛЕНИЮ «ПРОГРАММНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ».....	188
Е.Г. Романова, П.Е. Шуваев РЕАЛИЗАЦИЯ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ»	191
М.Г. Усатова, Г.С. Итпекова ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ	193
Н.Ф. Добрынина ВЛИЯНИЕ УВЕЛИЧЕНИЯ ДОЛИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ НА КАЧЕСТВО ОБУЧЕНИЯ	195
Т.В. Черушева, Я.А. Алексеева КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В N-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ	197
Т.В. Черушева, Е.В. Горбункова МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЗАШУМЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ.....	199
СОДЕРЖАНИЕ.....	203

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ И СОЦИАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ**

Сборник статей

Под редакцией ***И.В. Бойкова***

Редакторы ***В.С. Назарова, Е.Л. Соловьёва***

Ответственный за выпуск – ведущий специалист образовательных
программ ПДЗ ***А.И. Лунькова***

Компьютерная верстка ***А.А. Щербаковой***

Подписано в печать 12.05.2012

Формат 60×84 1/16

Бумага тип. № 1

Отпечатано на ризографе

Уч.-изд. л. 12,2

Тираж 65 экз.

Заказ 84

АННОО «Приволжский Дом знаний»
440026, г. Пенза, ул. Лермонтова, 8А
Множительный участок ПДЗ
440026, г. Пенза, ул. Лермонтова, 8А